Уральский
федеральный
университет
имени первого Президента
России Б.Н.Ельцина
Высшая школа
экономики
и менеджмента

Н. П. БОГОЛЮБОВА

МИКРОЭКОНОМИКА: ТЕОРИЯ ПОТРЕБИТЕЛЬСКОГО ПОВЕДЕНИЯ

Учебное пособие

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
УРАЛЬСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ПЕРВОГО ПРЕЗИДЕНТА РОССИИ Б. Н. ЕЛЬЦИНА

Н. П. Боголюбова

МИКРОЭКОНОМИКА: ТЕОРИЯ ПОТРЕБИТЕЛЬСКОГО ПОВЕДЕНИЯ

Учебное пособие

Рекомендовано методическим советом УрФУ
для студентов, обучающихся по программе бакалавриата
по направлению подготовки 38.03.01 «Экономика»

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2017

ББК У012.1я73-1
Б742

Р е ц е н з е н т ы:
кафедра маркетинга и международного менеджмента
Уральского государственного экономического университета
(заведующий кафедрой доктор экономических наук,
профессор Л. М. Капустина);

В. М. Пищулов, доктор экономических наук,
профессор кафедры истории и экономической теории
Уральского государственного лесотехнического университета

Боголюбова, Н. П.

Б742 Микроэкономика: теория потребительского поведения : учеб. пособие / Н. П. Боголюбова ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Урал. федер. ун-т. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2017. — 202 с.

ISBN 978-5-7996-2066-0

В учебном пособии рассмотрены основные положения теории потребительского поведения, дан анализ моделей принятия решений домашним хозяйством, выявлены факторы индивидуального спроса на блага. Приведены методы анализа практических ситуаций и типовые задания с решениями и ответами.

Предназначено для студентов бакалавриата, осваивающих дисциплину «Микроэкономика», в том числе будет полезно им при подготовке к промежуточной и итоговой аттестации, к федеральному интернет-экзамену бакалавров и к другим контрольным мероприятиям. Представляет интерес и для преподавателей экономической теории.

ББК У012.1я73-1

ISBN 978-5-7996-2066-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

От автора

Теория потребительского поведения является одним из ключевых разделов микроэкономики, и ее изучение предшествует изучению проблем, связанных с решениями агентов в сфере производства, и проблем функционирования рынков с различной структурой. Основная задача изучения поведения потребителя — исследование проблем выбора при формировании потребительского набора и принятия решений домашними хозяйствами на рынках благ. Результаты анализа потребительского выбора позволяют: объяснить реакцию домашних хозяйств на изменения внешней для них среды (цен благ, налогов, субсидий, прямых ограничений на объемы потребления и т. д.); оценить последствия указанных изменений для благосостояния потребителей; разработать меры государственной политики, направленной на предотвращение снижения уровня жизни населения при неблагоприятных изменениях рыночной конъюнктуры. Понимание закономерностей процесса принятия решений потребителями (домашними хозяйствами) в конечном итоге позволяет оценить изменения в рыночном спросе и объяснить исключения из эмпирического закона спроса. Важны результаты анализа потребительского поведения и для фирм – продавцов потребительских благ. Понимание того, как изменение факторов индивидуального спроса повлияет на решения об объеме планируемых покупок, лежит в основе рыночной стратегии этих фирм. Иначе говоря, выводы теории потребительского поведения – основа для *B2C*-маркетинга.

В рамках данного учебного пособия рассматриваются базовые вопросы потребительского выбора: бюджетное ограничение потребителя; модели формирования оптимального потребительского набора, в том числе – в условиях изменяющихся дохода и цен[1]. Уровень изложения теоретического материала и предлагаемых заданий соответствует промежуточному уровню изучения микроэкономической теории.

Построение микроэкономических моделей происходит на основе освобождения от множества специфических факторов и условий деятельности. Иначе говоря, этапу построения моделей предшествует принятие ряда экономических аксиом. К основным аксиомам в микроэкономическом анализе относят: ограниченность ресурсов; наличие альтернативной стоимости использования ресурсов; зависимость результатов деятельности от затрат; наличие целей экономической деятельности у любого субъекта (агента); поливариантность достижения целей и наличие критерия эффективности деятельности; разделение труда и специализацию, обусловливающие необходимость обмена; существование денег как результат развития специализации и обмена.

Наряду с перечисленными аксиомами принимается также ряд допущений (упрощающих предпосылок), которые позволяют учесть существенные параметры принятия решений и освободиться от незначимых. К упрощающим предпосылкам анализа, дающим возможность построить приемлемую модель[2] поведения потребителя, относятся: наличие полной и достоверной информации относительно всех параметров, влияющих на принятие решений; наличие только координационных связей (равноправность участников экономических отношений; тип экономической системы – рыночный); игнорирование особой регулирующей роли

---

[1] Специальные вопросы потребительского выбора (поведение в условиях натурального дохода; модель выбора между потреблением и досугом; индивидуальное предложение труда; модель межвременного выбора; принятие решений в условиях неопределенности), как правило, в базовый курс дисциплины «Микроэкономика» для бакалавров не включаются и рассматриваются либо в рамках других учебных дисциплин, либо в курсе «Микроэкономика» на продвинутом уровне, при освоении магистерских программ по направлению «Экономика».

[2] Здесь и далее под моделью будет пониматься упрощенное описание экономического субъекта и принимаемых им решений без утраты основных системных характеристик субъекта.

государства; абсолютное преобладание денежных отношений (отсутствие агентов, ведущих натуральное хозяйство, и посредников); отсутствие инфляции (совпадение номинальных и реальных показателей); совпадение величин доходов и расходов домашних хозяйств (отсутствие сбережений).

Кроме того, построение моделей индивидуального поведения (отдельных домашних хозяйств, отдельных фирм) и моделей взаимодействия субъектов на рынках осуществляется исходя из таких поведенческих предпосылок, как полная рациональность и простое следование собственным интересам[3].

Перечисленные выше аксиомы и упрощающие предпосылки позволяют произвести анализ деятельности отдельных экономических агентов и построить основные модели их функционирования, определив цель, ограничения и условия достижения оптимума.

Логика анализа поведения потребителя (домашнего хозяйства) при формировании оптимального набора благ может быть описана как совокупность последовательно реализуемых этапов. На первом этапе характеризуются предпочтения потребителя и осуществляется их формализация через функцию полезности. На втором этапе рассматриваются возможности выбора (бюджетное ограничение). Первый и второй этап могут быть реализованы и в обратной последовательности. Третий этап – построение модели поведения потребителя и получение результата – представлений о структуре и составе оптимального потребительского набора; построение функций индивидуального спроса на набор благ и отдельные блага – компоненты оптимального набора. Четвертый этап – оценка последствий для благосостояния потребителя изменений в доходе (бюджете) и в ценах.

---

[3] Принятие всех названных предпосылок позволяет рассматривать субъектов микроуровня экономики как оптимизаторов, стремящихся достичь цели экономической деятельности наиболее эффективным способом и не склонных к иррациональному поведению. Кроме того, это дает возможность абстрагироваться от проблем оппортунистического поведения, представляющих собой специальный раздел микроэкономического анализа (модели типа «принципал – агент»).

Структура данного учебного пособия отражает общую логику анализа поведения потребителя. В рамках каждой главы рассматриваются основные теоретические положения, а также даются примеры типовых заданий, предлагаются методы анализа конкретных ситуаций и алгоритмы решения расчетных задач.

В первой главе приводится категориальный аппарат теории потребительского поведения; рассматриваются потребности домашнего хозяйства и способы их удовлетворения; осуществляется формализация предпочтений потребителя. Вторая глава отведена анализу бюджетного ограничения и описанию бюджетного множества. В третьей главе освещается процесс оптимального выбора потребителя. Результатом анализа оптимизационных моделей потребителя является установление функциональной зависимости индивидуального спроса от формализуемых факторов. Четвертая глава знакомит с функциями индивидуального спроса и факторами, определяющими рыночные решения домашнего хозяйства. В пятой главе рассмотрены эффекты для спроса, обусловленные изменениями дохода и цен. В шестой главе представлены особенности принятия решений об оптимальном наборе в условиях получения потребителем натурального дохода. В седьмой главе описываются последствия изменений в ценах для благосостояния потребителя.

Реализация образовательных программ в контексте ФГОС ВО нацелена на получение студентами умений и навыков применения теоретических положений к анализу хозяйственной практики. Для формирования у обучающихся соответствующих компетенций при освоении теории потребительского поведения в каждую главу учебного пособия включены типовые задания (расчетные задачи, упражнения или практические ситуации), сопровождаемые подробными пояснениями алгоритма анализа (решения) и ответами. Большинство заданий снабжено графическими иллюстрациями.

В приложении к учебному пособию приведены основные используемые в тексте обозначения.

1. ПОТРЕБНОСТИ И ПРЕДПОЧТЕНИЯ ДОМАШНЕГО ХОЗЯЙСТВА: КАЧЕСТВЕННАЯ И КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА

1.1. Экономическая деятельность домашнего хозяйства

Домашнее хозяйство – это отдельный индивид или группа индивидов, имеющих общий бюджет и совместно его использующих. Как потребитель[4] домашнее хозяйство является субъектом национальной экономики предельного уровня, т. е. мельчайшим элементом экономической системы, дальнейшее дробление которого на составные части приведет к утрате системных свойств. Целью экономической деятельности потребителя (домашнего хозяйства) является наиболее полное удовлетворение имеющихся у его членов потребностей. Как любой экономический субъект потребитель имеет цель деятельности и сталкивается с ограничениями в принятии решений. Ограничением в деятельности домашнего хозяйства являются величина бюджета и сложившаяся на товарных рынках система цен благ потребительского назначения. Осуществление домашним хозяйством экономической деятельности предполагает получение в собственное распоряжение и использование благ потребительского назначения[5].

---

[4] Необходимо разграничивать понятия «потребитель» и «покупатель», «производитель» и «продавец». Домашнее хозяйство принято называть потребителем. Однако в сфере обмена оно может выступать и как покупатель (на рынках продуктов), и как продавец (на рынках факторов производства).

[5] Под благами понимаются материальные объекты или услуги, удовлетворяющие какие-либо человеческие потребности. Блага подразделяются на блага потребительские и блага производственного назначения и могут быть охарактеризованы количественно, через принятые натурально-вещественные единицы измерения, а также на блага, созданные природой, и блага, созданные человеком.

Поскольку объем экономических благ, имеющихся в распоряжении всех экономических агентов, ограничен, возникают проблемы распределения этих благ и получения их в распоряжение конкретного агента. Для получения блага в собственное распоряжение агент должен прибегнуть к одному из экономических или неэкономических способов[6]. Все современные экономики являются денежными, следовательно основным способом получения экономических благ[7] (как материальных объектов, так и услуг) в распоряжение домашнего хозяйства является их покупка. На рынках благ домашнее хозяйство выступает в качестве покупателя, т. е. субъекта, предъявляющего спрос, или агента, желающего обменять деньги на благо. Сказанное предопределяет влияние на экономические решения домашнего хозяйства цен, сложившихся на рынках благ[8].

Кроме того, все блага могут быть разделены на две ключевые группы: экономические блага и свободные блага. Признаком, позволяющим отнести благо к той или иной группе, выступает соотношение наличного и потребного количества благ. К свободным относят блага, наличное количество которых – не меньше потребного. Если наличное количество блага меньше потребного, то данное благо является экономическим. К экономическим благам относятся все блага, созданные людьми, и часть благ, созданных природой. Именно по поводу экономических благ формируются отношения между субъектами экономики.

[6] К экономическим способам получения блага в распоряжение агента относятся: самопроизводство и обмен – натуральный (бартер) или денежный (купля). Неэкономическими способами получения блага в распоряжение агента являются: присвоение на основе принудительного отчуждения (отъем); присвоение на основе добровольного отчуждения. Ключевым отличием экономических способов от неэкономических выступают адекватные затраты, связанные с реализацией способа получения блага (затраты ресурсов при самопроизводстве или несение расходов на покупку).

[7] Торгуемые экономические блага принято также называть товарами.

[8] Поскольку отдельное домашнее хозяйство имеет на рынке вес незначительный, оно не может воздействовать на уровень рыночных цен и выступает как ценополучатель (*price-taker*). Потребителю-покупателю на рынке противостоят продавцы, осуществляющие предложение блага, или, иначе, предъявляющие спрос на деньги. Взаимодействие на рынке покупателей и продавцов имеет результатом установление рыночной цены блага. Рыночная цена блага – количество денежных единиц, противостоящее в обмене единице блага.

1.2. Потребности домашнего хозяйства и способы их удовлетворения

Поскольку целью экономической деятельности домашнего хозяйства является наиболее полное удовлетворение потребностей всех его членов, имеющихся на данный момент, необходимо определить понятие «потребность».

Под п о т р е б н о с т ь ю понимается состояние неудовлетворенности, из которого агент желает выйти, или состояние удовлетворенности, которое агент желает продлить.

В каждый момент времени для агента (домашнего хозяйства) характерно наличие множества потребностей (k видов потребностей). Потребности различаются по видам благ, их удовлетворяющих, а также по степени интенсивности (насущности). Упорядочивание потребностей по принципу убывания степени интенсивности позволяет сформировать шкалу (иерархию) потребностей: $\overline{N} = (N_1, N_2, N_3, \ldots, N_k)$.

Способом удовлетворения потребности является использование блага[9] (благ) в соответствии с его (их) натурально-вещественной формой. Данное обстоятельство предопределяет наличие у благ *свойства полезности* – способности удовлетворять потребность (потребности), доставлять использующему его агенту удовольствие.

Потребности подразделяются на ненасыщаемые и на полностью удовлетворяемые. Потребности, которые могут быть полностью удовлетворены (сняты), имеют количественную характеристику – меру потребности.

М е р а п о т р е б н о с т и – количество блага определенного (i-го) вида, способное полностью удовлетворить потребность. Меру потребности можно указать только для насыщаемых

[9] Блага могут быть подразделены на специализированные (удовлетворяющие только одну потребность) и многофункциональные (удовлетворяющие несколько потребностей). Универсальным благом являются деньги, способные доставить агенту набор благ и в конечном итоге удовлетворить имеющиеся у него потребности на определенном уровне. Деньги, как и любое другое благо, обладают полезностью.

потребностей. Указывается мера потребности в тех единицах измерения, в которых исчисляется объем блага данного вида.

Особенностью процесса использования благ (потребления) является снижение степени интенсивности данной потребности по мере ее удовлетворения, т. е. по мере потребления блага.

На основе шкалы потребностей формируется шкала предпочтений, представляющая собой упорядоченную совокупность благ, удовлетворяющих те или иные потребности агента. Упорядочивание осуществляется по принципу: «Ранг блага тем выше, чем интенсивнее потребность, им удовлетворяемая». Поскольку одна и та же потребность может быть удовлетворена посредством использования различных благ, можно говорить о поливариантности (множественности) способов удовлетворения потребности. Благо тем лучше для потребителя, чем более эффективно оно удовлетворяет имеющуюся потребность. Таким образом, блага могут быть проранжированы по принципу эффективности в потреблении.

С учетом сказанного можно построить шкалу (совокупность) благ, упорядоченных таким образом, что первые позиции занимают блага, удовлетворяющие самые интенсивные потребности наилучшим образом, затем – блага, удовлетворяющие менее интенсивные потребности. Внутри группы благ, удовлетворяющих определенную потребность, производится вторичное ранжирование благ по принципу убывания эффективности блага в потреблении. Полученная шкала благ отражает предпочтения агента по отношению к благам. Чем выше ранг блага в шкале предпочтений, тем большее удовольствие приносит его потребление.

Формируя шкалу благ, необходимо учитывать взаимосвязи между благами в сфере потребления. Домашнее хозяйство может рассматривать каждую пару благ в качестве либо субститутов (благ-заменителей), либо комплементариев[10] (дополняющих друг друга благ), либо индифферентов (т. е. домашнее хозяйство может быть равнодушно к одному из благ в паре). Наличие в товарном

[10] Термин «комплементарий» происходит от английского глагола *to complete* (дополнять, комплектовать).

мире благ, к которым потребитель равнодушен, обусловливает в системе предпочтений меньшее количество позиций (m) в сравнении с номенклатурой товарного мира (n). Иными словами, в шкале благ могут быть представлены не все виды существующих на данный момент потребительских благ ($m \leq n$).

Также следует принимать во внимание синергетический эффект, возникающий при совместном использовании благ. Блага, употребляемые в комплексе, могут обеспечить потребителю удовольствие большее, нежели то, которое обеспечит потребление этих же благ в тех же объемах, но по отдельности друг от друга.

Поскольку потребитель использует не отдельное благо, а набор благ, по отношению к наборам также необходимо произвести ранжирование: лучше те наборы, потребление которых обеспечивает потребителю большее удовольствие. Проранжировав блага и состоящие из них наборы, получим систему предпочтений данного агента. Следующим этапом анализа является описание системы предпочтений.

1.3. Предпочтения потребителя и функция полезности

Предпочтения потребителя формируются под воздействием множества факторов неэкономического характера: возраста и пола агента; его национальности; уровня образования; природно-климатических условий, в которых действует агент; конфессионной принадлежности; особенностей социокультурной среды и др. Система вкусов и предпочтений (предпочтения) стабильна в рамках короткого периода и изменяется в течение длительного периода.

Описание системы предпочтений потребителя базируется на оценке удовольствия, доставляемого потребителю использованием конкретного блага или набора благ. По определению, блага обладают полезностью, или способностью удовлетворять потребность (потребности). Данное свойство благ изначально пытались охарактеризовать не только качественно, но и количественно[11].

Каждая единица блага обладает для потребителя той или иной полезностью. Реализация цели потребителя предполагает выбор тех благ, которые имеют наибольшую полезность. Чем больше блага определенного вида получает и потребляет агент, тем полнее удовлетворена потребность. Чем больше наименований благ присутствует в наборе, тем больше спектр удовлетворяемых потребностей. Факторами, определяющими полезность отдельного блага, являются:

– ранг блага в шкале предпочтений (зависящий от степени интенсивности удовлетворяемой потребности);
– наличное количество блага, а также соотношение между потребным и наличным количеством блага.

Наличие у благ свойства полезности предопределяет наличие полезности и у набора благ. Полезность набора благ – удовольствие, получаемое агентом при использовании данного набора. Полезность набора зависит от полезности отдельного блага – компонента данного набора, а также от номенклатуры и количеств различных благ в наборе. Таким образом, можно считать, что общая полезность набора складывается из предельных полезностей благ, включаемых в этот набор. Однако общая полезность набора благ не может быть сведена к простой сумме предельных полезностей благ, составляющих потребительский набор, поскольку совместное использование благ может обеспечить дополнительный (синергетический) эффект.

В рамках кардиналистической версии теории предельной полезности (маржинализма) признавалась измеримость

[11] Количественная характеристика полезности – количество удовольствия, доставляемого агенту благом в процессе потребления. Поскольку объективных единиц для измерения удовольствия не существует, в рамках кардиналистического подхода к анализу потребительского поведения (сторонники данного подхода – маржиналисты и представители австрийской школы в политической экономии, в частности К. Менгер, Ф. Визер, Э. Бем-Баверк) было предложено введение в научный оборот понятия *ю́тил* (*util*) – единицы полезности (от англ. *utility* – полезность).

полезности, а также однозначность величины полезности, доставляемой агенту конкретным благом и, следовательно, определенным набором благ. Полезность набора благ описывалась с помощью функции полезности $U = F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, аргументами которой выступали количества благ (z_i), включаемых в данный набор. Функция (общей) полезности набора отражает систему предпочтений конкретного агента, а также взаимосвязь благ в потреблении.

В рамках кардиналистического подхода функция полезности задана однозначно; важны, с точностью до ютила, уровень полезности набора и значение функции полезности. При сравнении наборов во внимание принимается не только соотношение полезностей этих наборов, но и разница между величинами полезностей. Невозможность объективной оценки величины извлекаемой из потребления блага полезности породила множество критических замечаний к кардиналистической версии теории предельной полезности. Преодоление ряда справедливых замечаний предопределило появление и развитие иного подхода к анализу предпочтений индивида – ординалистического, или порядкового.

Ординалистический подход в теории предельной полезности отвергает предпосылку об измеримости полезности. Величины полезности набора и предельных полезностей благ – неважны. Ключевое значение приобретает порядок предпочтений. Система предпочтений агента строится на основе отношения предпочтения, позволяющего упорядочить все блага и различные по составу и структуре наборы. Бóльшая предпочтительность набора благ равнозначна тому, что этот набор обладает большей полезностью.

Блага и наборы благ в ординалистической теории полезности упорядочиваются на основе отношения предпочтения. То благо (или набор благ), которое агент предпочитает другому благу, обладает более высоким порядком предпочтений, а значит, имеет большую полезность. При этом уровень полезности (значение функции полезности) роли не играет, важен порядок предпочтений.

Отношение предпочтения – бинарное отношение[12], обладающее свойствами рефлексивности, транзитивности и сравнимости (полноты, или полной упорядоченности).

Рефлексивность отношения предпочтения означает, что потребитель, даже не имея возможности сравнивать данный набор *A* с каким-либо другим, может сформулировать свое к нему отношение (набор *A* не хуже себя самого).

Транзитивность отношения предпочтения состоит в том, что агент, сравнивая попарно ряд наборов (три и более), упорядочивает эти наборы: если набор *A* предпочтительнее набора *B*, а набор *B* предпочтительнее набора *C*, то набор *A* предпочтительнее набора *C*. Наличие свойства транзитивности позволяет получить логическую систему предпочтений потребителя, не прибегая к значительному количеству попарных сравнений наборов.

Сравнимость (*полнота*, или *полная упорядоченность*) заключается в том, что для любой пары нетождественных наборов *A* и *B* можно указать следующее: либо набор *A* предпочтительнее набора *B*; либо набор *B* предпочтительнее набора *A*; либо эти наборы эквивалентны (равнопредпочтительны).

Различают: строгое отношение предпочтения (обозначение: $\succ$); нестрогое отношение предпочтения (обозначение: $\succcurlyeq$); отношение эквивалентности (обозначение: $\sim$).

Рассмотрим два нетождественных набора благ, $\overline{A}$ и $\overline{B}$, и возможные отношения между ними. Допустим, отношение между наборами $\overline{A} \succ \overline{B}$. Это означает, что набор *A* строго предпочитается набору *B*. В терминах полезности: общая полезность набора *A* строго больше общей полезности набора *B*. Если между наборами благ установлено отношение $\overline{A} \succcurlyeq \overline{B}$, набор *A* нестрого предпочитается набору *B*. Следовательно, полезность набора *A* не меньше полезности набора *B*. Отношение эквивалентности: $\overline{A} \sim \overline{B}$ означает, что набор *A* равнопредпочтителен набору *B*, или полезность набора *A* равна полезности набора *B*.

[12] Бинарное отношение – отношение, задаваемое на паре наборов.

На основе отношения предпочтения наборы благ упорядочиваются, формируется система предпочтений, обладающая аксиоматически заданными свойствами монотонности и выпуклости. Разнообразие систем предпочтения различных потребителей обусловливает случаи невыполнения (частичного или полного) указанных аксиом.

Свойство монотонности иногда называют аксиомой ненасыщения. Суть ее состоит в том, что любой набор с большим количеством благ не менее предпочтителен, чем набор с меньшим количеством благ. Или: набор, в котором одного из благ больше, чем в другом (при неизменном количестве прочих), предпочтительнее. При этом предельные полезности благ в наборе неотрицательны при любом их количестве, т. е. ни по одной из имеющихся у агента потребностей невозможно перенасыщение. Упрощенно идею монотонности можно охарактеризовать фразой: «Чем больше, тем не хуже». Наряду с понятием «монотонность» выделяют также понятие «строгая монотонность», смысл которого состоит в том, что чем больше благ в наборе, тем лучше. В этом случае все блага в наборе имеют положительные предельные полезности, независимо от их количества в наборе. Иначе: ни одну из имеющихся у агента потребностей невозможно удовлетворить полностью.

Второе свойство системы предпочтений – *выпуклость* – обеспечивает выполнение закона убывающей предельной полезности. Или, точнее, означает, что по мере увеличения количества блага в наборе его предельная полезность не возрастает (она или убывает, или остается константой). Некоторые системы предпочтений обладают свойством строгой выпуклости, что означает полное выполнение закона убывающей предельной полезности: чем больше блага в наборе, тем меньше величина полезности дополнительной единицы данного блага. Формально строгая выпуклость означает, что любой набор C, являющийся линейной комбинацией двух эквивалентных, но нетождественных наборов A и B, более предпочтителен, чем исходные наборы, или не менее предпочтителен, чем исходные наборы. Формально: если $A \sim B$, $A \not\equiv B$;

$C = \alpha A + (1 - \alpha) B$, тогда $C \succ A \sim B$, если $0 \le \alpha \le 1$, и $C \succcurlyeq A \sim B$, если $0 \le \alpha \le 1$.

Предпочтения потребителя могут быть представлены с помощью функции полезности набора, которая, по мнению сторонников ординалистического подхода, задается неоднозначно, с точностью до монотонно возрастающего преобразования. Это означает, что если функция $F(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ отражает предпочтения агента, то и функция $\Phi(F(z_1, z_2, \ldots, z_n))$, полученная в результате любого монотонно возрастающего преобразования, отражает эти предпочтения. Величина полезности набора незначима; во внимание – при сравнении наборов – принимается только соотношение полезностей сопоставляемых наборов. К монотонно возрастающим преобразованиям, сохраняющим порядок предпочтений, относятся: добавление любого числа; возведение в нечетную положительную степень; логарифмирование и др.

Если благо делимо, для каждой его единицы можно указать величину полезности – предельную полезность конкретной единицы блага i-го вида, MU_i.

Определив функцию полезности набора благ, можно рассмотреть функцию предельной полезности i-го блага – MU_i. Значение функции предельной полезности блага показывает, как изменяется полезность набора благ при изменении количества блага i-го вида на единицу.

Если функция (общей) полезности набора благ непрерывна, т. е. все блага, включаемые в набор, делимы на бесконечное количество частей (непрерывны), функция предельной полезности блага также непрерывна и представляет собой частную производную функции полезности набора благ:

$$MU_i(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \frac{\partial U(z_1, z_2, \ldots, z_n)}{\partial z_i}. \qquad (1.1)$$

Если функция полезности набора благ задана дискретно[13] (т. е. входящие в набор блага дискретны), предельная полезность блага *i*-го вида может быть определена по формуле (1.2):

$$\begin{aligned} MU_i\left(z_1, z_2, \ldots, z_i, \ldots, z_n\right) = F\left(z_1, z_2, \ldots, z_i, \ldots, z_n\right) - \\ - F\left(z_1, z_2, \ldots, z_i - 1, \ldots, z_n\right). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Поскольку по мере потребления блага степень интенсивности потребности снижается, каждая последующая единица блага имеет полезность меньшую, чем предыдущая. Данная взаимосвязь получила название *закона убывающей предельной полезности*. Однако увеличение количества блага в наборе обусловливает увеличение общей полезности данного блага и общей полезности набора (если не происходит насыщения или перенасыщения).

В случае, когда блага, входящие в набор, непрерывны, появляется возможность установления функциональной зависимости полезности набора от количеств благ, включаемых в этот набор. Функции общей полезности набора и предельной полезности

[13] Изначально, в рамках кардиналистической версии теории предельной полезности, предполагалась неделимость благ в наборе. Система предпочтений описывалась с помощью родовых и порядковых полезностей. Под родовой полезностью понималась полезность конкретного блага, удовлетворяющего определенную потребность (независимо от стадии ее удовлетворения). Порядковые полезности определялись внутри родовых полезностей. Блага ранжировались по родовым и порядковым полезностям, формируя шкалу полезностей. Отражением такого алгоритма построения системы предпочтений является таблица Менгера, содержащая данные о предельных полезностях благ. По столбцам фиксировались родовые полезности, а по строкам – порядковые. Такого рода таблицу можно сформировать посредством опроса экономического агента. Данные таблицы Менгера представляют собой своего рода экспертные оценки удовольствия от потребления конкретной единицы конкретного блага. Численные значения предельных полезностей в таблице Менгера могут быть заданы любыми положительными числами, в зависимости от номенклатуры благ и меры потребностей в них. Описание системы предпочтений с дискретными благами осуществляется посредством дискретной функции полезности набора. Общая полезность набора определяется как сумма предельных полезностей всех единиц всех благ, входящих в набор.

блага – непрерывны. Возможны следующие варианты динамики общей и предельной полезности блага:

1) потребность в благе не может быть удовлетворена полностью[14];
2) потребность в благе может быть полностью удовлетворена, однако перенасыщения не наступает[15];
3) потребность в благе может быть полностью удовлетворена, наряду с насыщением возможно и перенасыщение потребности (благо становится антиблагом)[16];
4) потребность в благе становится все более интенсивной по мере увеличения потребления этого блага до некоторого объема, далее события развиваются по одному из трех сценариев, рассмотренных выше[17];

---

[14] Предельная полезность блага положительна ($MU_i > 0$) при любом объеме использования данного блага. При этом предельная полезность блага убывает $\left(\frac{\partial MU_i(\cdot)}{\partial z_i} < 0\right)$, а общая полезность набора благ перманентно возрастает $\left(\frac{\partial U(\cdot)}{\partial z_i} > 0\right)$. Такого рода динамика общей и предельной полезности свидетельствует о строгой монотонности предпочтений. Для агента актуален принцип: чем больше, тем лучше.

[15] Предельная полезность блага неотрицательна при любом объеме его использования. Если объем блага в наборе не превышает меры потребности (z_i^*), предельная полезность блага положительна: $MU_i > 0$, если $z_i < z_i^*$. Если $z_i \geq z_i^*$, $MU_i = 0$. Общая полезность блага увеличивается до тех пор, пока не достигнута точка насыщения; далее величина общей полезности блага, достигнув максимума, не меняется. Для агента актуален принцип: чем больше, тем не хуже. Такого рода предпочтения называются монотонными.

[16] Предполагается, что возможно не только насыщение (полное удовлетворение), но и перенасыщение потребности. Перенасыщение означает, что благо перестает приносить удовольствие, его потребление наносит вред: благо превращается в антиблаго, а его предельная полезность становится отрицательной: $MU_i > 0$, если $z_i < z_i^*$; $MU_i = 0$, если $z_i = z_i^*$; $MU_i < 0$, если $z_i > z_i^*$. Общая полезность блага растет до точки насыщения; в точке насыщения достигает максимума, а затем начинает уменьшаться.

[17] Данный вариант динамики предельной и общей полезности блага отличает то, что при количестве блага в наборе $0 < z_1 \leq \tilde{z}_1$ предельная полезность блага не только положительна, но и растет по мере увеличения количества блага

5) потребность в благе – не насыщаема, предельная полезность благ не меняется при изменении количества блага в наборе (случай так называемых вырожденных предпочтений[18]).

Предпочтения потребителя, согласно ординалистической версии теории предельной полезности, формализуются посредством подбора удобной для анализа функции полезности. Аргументами функции полезности набора являются количества благ, включаемых в набор. В случае, когда предпочтения потребителя заданы на наборах из двух благ, они могут быть представлены графически, с помощью аппарата кривых безразличия[19].

Поскольку домашние хозяйства друг от друга отличаются, следует исходить из того, что предпочтения потребителей многообразны. Столь же многообразны и функции полезности, описывающие эти предпочтения.

1.4. Графический анализ предпочтений агента

Отображением функции полезности (системы предпочтений) являются кривые безразличия, образующие карту безразличия.

Кривая безразличия – совокупность потребительских наборов, разных по составу, но имеющих одинаковый для данного потребителя порядок предпочтений (одинаковую полезность).

Карта кривых безразличия (карта безразличия – *indifference map*) – совокупность кривых безразличия для данного типа предпочтений.

Предпочтения потребителей разнообразны. Вследствие этого различаются и карты безразличия. Основные типы предпочтений и соответствующие им кривые безразличия (карты безразличия)

в наборе: $\frac{\partial MU_i}{\partial z_i} > 0$. Это означает, что общая полезность блага увеличивается быстрее, чем его количество.

[18] В этом случае MU_i = const > 0; общая полезность блага – линейная возрастающая функция количества блага.

[19] При этом неважно, какой подход (кардиналистический либо ординалистический) положен в основу построений функции полезности набора.

представлены на рис. 1.1–1.4. Индексы кривых безразличия возрастают по мере увеличения порядка предпочтения (уровня полезности) наборов, составляющих кривые безразличия.

Предпочтения агента такие, что блага z_1 и z_2 рассматриваются им как несовершенные субституты (заменители), описываются функцией полезности Кобба – Дугласа вида: $U\left(z_1, z_2\right) = Az_1^a z_2^b$, где A, a, b – положительные константы. Такие предпочтения принято называть *стандартными*. Стандартные предпочтения являются строго монотонными и строго выпуклыми. Показатели степеней в функции полезности отражают эффективность благ в потреблении. Карта кривых безразличия для стандартных предпочтений представлена на рис. 1.1.

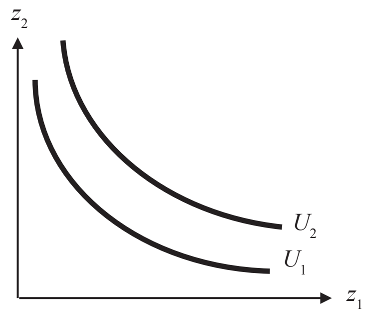

Рис. 1.1. Кривые безразличия для благ – несовершенных субститутов (стандартные предпочтения)

Блага могут быть для потребителя совершенными субститутами. В этом случае предпочтения описываются аддитивной функцией полезности, имеющей вид: $U\left(z_1, z_2\right) = az_1 + bz_2$, где параметр a – положительная константа, отражающая величину предельной полезности первого блага; параметр b – положительная константа, отражающая величину предельной полезности второго блага. Поскольку предельные полезности благ – константы, закон убывающей предельной полезности не выполняется. Такие предпочтения называют *вырожденными*. Карта кривых безразличия для вырожденных предпочтений представлена на рис. 1.2.

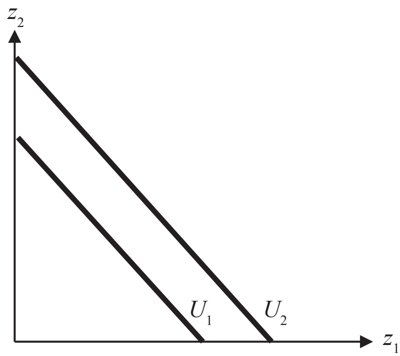

Рис. 1.2. Кривые безразличия для благ – совершенных субститутов (предельные полезности благ постоянны; вырожденные предпочтения)

Тангенс угла наклона кривых безразличия в случае вырожденных предпочтений не меняется и определяется соотношением предельных полезностей благ:

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{mu_1}{mu_2} = -\frac{a}{b}.$$

Предпочтения агента, использующего блага в комплексе, т. е. относящегося к благам, как к комплементариям, описываются функцией полезности леонтьевского типа: $U(z_1, z_2) = \min\{az_1, bz_2\}$. Здесь параметры a и b – предельные полезности первого и второго благ соответственно. Такие предпочтения отражают существование некоей «технологии потребления», или рецептуры (см. рис. 1.3). Технология потребления представлена линией, исходящей из начала координат и соединяющей точки излома кривых безразличия. Угол наклона этой линии – α. Тангенс угла наклона показывает пропорцию, в которой блага включаются в набор. Пропорция определяется соотношением предельных полезностей благ:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{mu_1}{mu_2} = \frac{a}{b}.$$

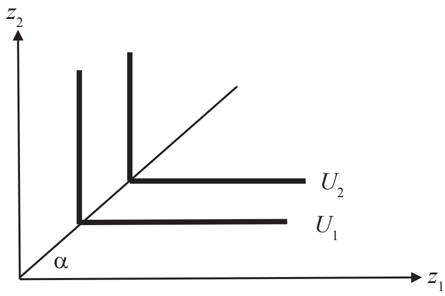

Рис. 1.3. Кривые безразличия для благ – совершенных комплементариев (предпочтения леонтьевского типа)

Потребитель может рассматривать пару благ и в качестве индифферентов. В этом случае блага не имеют связи в процессе потребления, т. е. не являются ни субститутами, ни комплементариями. Агент безразличен к одному из благ, тогда как другое может доставлять агенту определенную полезность. В этом случае также имеет место вырожденность предпочтений. Кривые безразличия выглядят как прямые линии, вертикальные либо горизонтальные. Функция полезности для предпочтений данного типа аддитивна $\left(U\left(z_1, z_2\right) = az_1 + bz_2\right)$, но полезность блага – истинного индифферента равна нулю. На рис. 1.4 представлены предпочтения потребителя, безразличного к благу первого вида. Предельная полезность второго блага – положительная константа b. Кривые безразличия для предпочтений данного типа – горизонтальные прямые.

Существуют и другие типы предпочтений, например предпочтения с точкой насыщения по одному или обоим благам; наборы могут состоять из блага и антиблага; предпочтения могут быть квазилинейными или лексикографическими. Для них также могут быть представлены кривые и карты безразличия.

Кривые безразличия (независимо от типа предпочтений) обладают определенными свойствами:

1) каждой кривой безразличия соответствует определенный уровень полезности (порядок предпочтения);

2) чем дальше от начала координат находится кривая безразличия, тем большую полезность имеют составляющие ее наборы (следствие ненасыщаемости);
3) кривые безразличия не пересекаются (каждый набор имеет определенную полезность, или порядок предпочтения);
4) кривые безразличия для большинства предпочтений выпуклы относительно начала координат (касательные к кривым безразличия имеют отрицательный наклон).

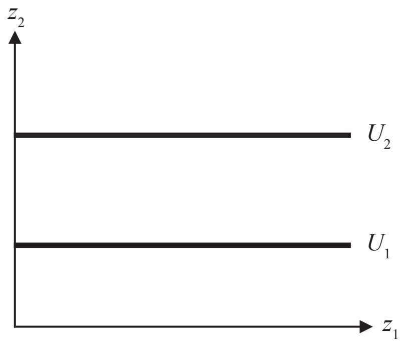

Рис. 1.4. Кривые безразличия для благ – индифферентов: агент безразличен к первому благу (функция полезности набора – $U(z_1, z_2) = b \cdot z_2$)

Важнейшей характеристикой кривых безразличия для благ-субститутов является *предельная норма замещения* (*в потреблении*), или *коэффициент субституции* (*marginal rate of substitution* – MRS_{ji}). Предельная норма замещения (MRS_{ji}) – пропорция замены j-м благом i-го при сохранении полезности набора благ неизменным. Предельная норма замещения всегда определяется для пары благ в конкретной точке, т. е. для определенного набора благ.

В случае присутствия в наборе благ двух видов (первого и второго) определяется MRS_{21}, которая показывает пропорцию замены первого блага вторым без изменения полезности набора. Если предпочтения не вырождены, различные наборы на кривой безразличия имеют разную предельную норму замещения. Для вырожденных предпочтений MRS_{21} – константа.

Формулу для определения предельной нормы замещения можно получить, рассматривая условие: $dU(z_1,\ z_2) = 0$. Следует учитывать, что поскольку при изменении набора происходит изменение количеств обоих благ, меняются их предельные полезности. Тогда должно выполняться условие:

$$dU\left(z_1,\ z_2\right) \approx MU_1 \cdot \Delta z_1 + MU_2 \cdot \Delta z_2 \approx 0. \qquad (1.3)$$

При бесконечно малых Δz_1 и Δz_2 в результате ряда преобразований получим формулу для определения пропорции замены первого блага вторым:

$$MRS_{21} = \frac{\Delta z_2}{\Delta z_1} = -\frac{MU_1(\cdot)}{MU_2(\cdot)}. \qquad (1.4)$$

На рис. 1.5 показаны величины предельных норм замещения для наборов A и B, лежащих на одной кривой безразличия.

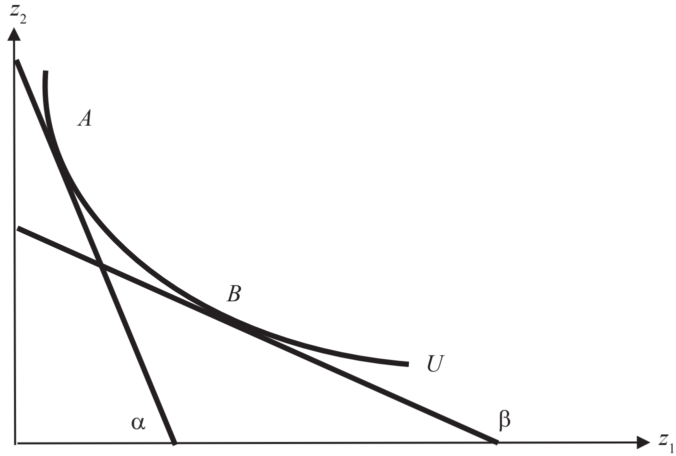

Рис. 1.5. Предельная норма замещения для наборов *A* и *B*

Предельная норма замещения для набора A – тангенс угла наклона касательной к кривой безразличия в точке A ($\text{tg}\,\alpha$); предельная норма замещения для набора B – тангенс угла наклона касательной в точке B ($\text{tg}\,\beta$).

Предельная норма замещения представляет собой функцию количеств двух благ – заменяемого и заменяющего: $\left|MRS_{21}\right| = f\left(z_1, z_2\right)$. Данная функция является убывающей по z_1 и возрастающей по z_2. Касательная к кривой безразличия в точке A имеет наклон α и проходит круче, чем касательная к этой же кривой безразличия в точке B, имеющая наклон β, то есть модуль тангенса угла α больше модуля тангенса угла β (см. рис. 1.5).

Набор может включать более двух благ. В общем случае, когда набор состоит из n видов благ ($n > 2$), величина предельной нормы замещения благом j-го вида блага i-го вида может быть определена по формуле (1.5):

$$MRS_{ji} = -\frac{MU_i\left(\cdot\right)}{MU_j\left(\cdot\right)} = -\frac{a_i \cdot F \cdot z_i^{a_i - 1} z_j^{a_j}}{a_j \cdot F \cdot z_i^{a_i} z_j^{a_j - 1}} = -\frac{a_i z_j}{a_j z_i}. \qquad (1.5)$$

Предельная норма замещения всегда определяется для конкретного набора благ. Для любого набора благ могут быть определены как прямые (MRS_{ji}), так и обратные предельные нормы замещения (MRS_{ij}).

Типовые задания с решениями и ответами

Задание 1.1

Предпочтения потребителя заданы на наборах из двух благ и представимы функцией полезности вида: $U\left(z_1, z_2\right) = Az_1^a z_2^b$. Какими должны быть показатели степени (параметры a и b), чтобы функция полезности соответствовала кардиналистическому подходу в теории полезности и отражала действие закона убывающей предельной полезности?

Решение и ответ

В кардиналистической версии теории предельной полезности на показатели степени в функции полезности Кобба – Дугласа налагаются определенные условия: $0 < a$, $b < 1$. Данное ограничение обусловлено необходимостью учета действия закона убывающей предельной полезности.

Функции предельных полезностей благ имеют следующий вид: $MU_1\left(z_1, z_2\right) = aAz_1^{a-1}z_2^b$; $MU_2\left(z_1, z_2\right) = bAz_1^a z_2^{b-1}$. Значения функций предельной полезности первого и второго блага положительны при условии a, $b > 0$.

Выполнение закона убывающей предельной полезности требует, чтобы первые производные функции предельной полезности для каждого блага были отрицательны. Поскольку

$$\frac{\partial MU_1(\cdot)}{\partial z_1} = a\left(a-1\right)Az_1^{a-2}z_2^b < 0,$$

указанное требование выполняется, если $(a - 1) < 0$. Следовательно, $a < 1$. Для второго блага: поскольку

$$\frac{\partial MU_2(\cdot)}{\partial z_2} = b\left(b-1\right)Az_1^a z_2^{b-2} < 0,$$

необходимо, чтобы выполнялось следующее условие: $(b - 1) < 0$. Следовательно, $b < 1$.

Таким образом, показатели степени в функции полезности Кобба – Дугласа должны удовлетворять условиям: $0 < a < 1$; $0 < b < 1$.

Задание 1.2

Предпочтения потребителей заданы на множестве из двух благ. Необходимо изобразить кривые безразличия и подобрать описывающие систему предпочтений функции полезности для следующих агентов:

(а) Агент *A* любит булочки (*X*) и совершенно безразличен к сосискам (*Y*), он всегда предпочитает как можно больше булочек, независимо от количества имеющихся сосисок;

(б) Агент *B* всегда готов заменить две сосиски (*Y*) на одну булочку (*X*), и чем больше он съедает, тем лучше ему становится;

(в) Агент *C*, съедая одну сосиску (*Y*), обязательно употребляет половину булочки (*X*) и ни за что не будет употреблять одно без другого.

Решения и ответы

(а) Благо *Y* – индифферент для агента *A*, его наличие/отсутствие в наборе не влияет на полезность последнего. Функция полезности имеет вид: $U(X, Y) = aX + 0 \cdot Y = aX$. Карта безразличия агента *A* представлена на рис. 1.6.

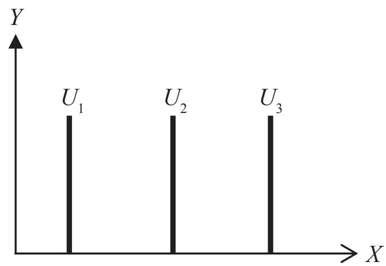

Рис. 1.6. Кривые безразличия к заданию 1.2(а)

(б) Блага *X* и *Y* являются для агента *B* совершенными субститутами. Замена может осуществляться в пропорции 2*X* = *Y*. Функция полезности имеет вид: $U(X, Y) = X + 2 \cdot Y$. Карта безразличия агента *B* представлена на рис. 1.7.

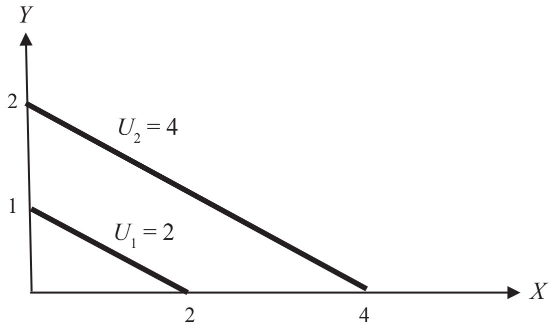

Рис. 1.7. Кривые безразличия к заданию 1.2(б)

(в) Блага X и Y являются для агента C совершенными комплементариями. Функция полезности имеет вид: $U(X, Y) = \min\{2X; Y\}$. Карта безразличия агента C представлена на рис. 1.8.

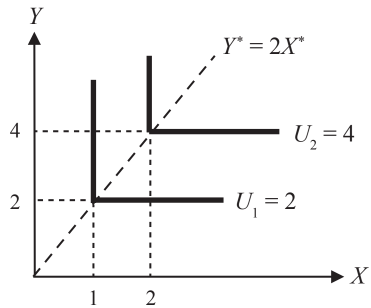

Рис. 1.8. Кривые безразличия к заданию 1.2(в)
($Y^* = 2X^*$ – технология потребления)

Задание 1.3

Предпочтения некоего потребителя определены на наборах из трех благ – X, Y, Z. Рассматривая наборы A, B, C и D, потребитель установил, что его отношение к данным наборам таково: $A \succ B \succ C \succ D$. Наборы имеют следующий состав: A – (10, 15, 30); B – (8, 15, 35); C – (7, 12, 25); D – (7, 12, 20). Каков тип предпочтений данного потребителя?

Решение и ответ

Предпочтения потребителя являются лексикографическими: наборы упорядочиваются сначала по благу X, затем по благу Y, а уже потом – по благу Z.

Задание 1.4

Предпочтения агента относительно потребительских наборов, содержащих неотрицательные количества благ x и y, описываются функцией полезности вида: $U(x, y) = x^2 + y^2$.

(а) Изобразите кривые безразличия для данных предпочтений.

(б) Являются ли предпочтения данного агента монотонными и выпуклыми?

Решения и ответы

(а) Предпочтения данного агента представимы картой безразличия, отображенной на рис. 1.9.

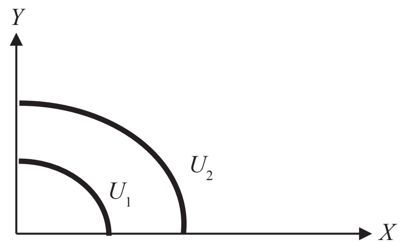

Рис. 1.9. Кривые безразличия к заданию 1.4(а)

(б) Предпочтения такого вида невыпуклы (невыпукло множество слабо предпочитаемых наборов) и строго монотонны (увеличение количества как X, так и Y, а также одновременное увеличение в наборе количеств X и Y приведет к переходу на более высокую кривую безразличия, т. е. полезность набора с большим количеством любого блага выше полезности исходного набора).

Задание 1.5

Предпочтения агента заданы на наборах из благ *X* и *Y*. Формально опишите предпочтения агента и охарактеризуйте наличие у систем предпочтений свойств выпуклости и монотонности для случаев, когда:

(а) набор включает блага-субституты (предпочтения – стандартные);

(б) набор включает блага-субституты (предпочтения – вырожденные);

(в) набор состоит из благ-комплементариев;

(г) набор состоит из блага и антиблага;

(д) существует точка насыщения благами.

Решения и ответы

Функции полезностей, описывающие систему предпочтений агента, будут иметь представленный ниже вид.

(а) Предпочтения агента строго монотонны («чем больше, тем лучше») и строго выпуклы: линейные комбинации (C) двух эквивалентных, но нетождественных наборов A и B $[C = \alpha A + (1-\alpha)B]$ более предпочтительны, чем исходные наборы, если $0 < \alpha < 1$; предпочтения представимы функцей полезности Кобба – Дугласа вида: $U\left(X, Y\right) = X^a Y^b$, $a, b = \text{const} > 0$.

(б) Предпочтения агента строго монотонны и выпуклы: линейные комбинации (C) двух эквивалентных наборов A и B $[C = \alpha A + (1-\alpha)B]$ равнопредпочтительны исходным наборам даже при условии $0 < \alpha < 1$; строгая выпуклость отсутствует; предельные полезности благ – константы (a, $b = \text{const} > 0$); предпочтения представимы аддитивной функцией вида: $U\left(X, Y\right) = aX + bY$.

(в) Предпочтения агента монотонны («чем больше, тем не хуже») и выпуклы. Строгая выпуклость присутствует фрагментарно, когда комбинируются наборы, лежащие на вертикальном и горизонтальном участках кривой безразличия. Данные предпочтения представимы функцией полезности леонтьевского типа: $U\left(X, Y\right) = \min\left\{aX;\, bY\right\}$.

(г) Предпочтения заданы на наборах, включающих благо и антиблаго. Такие предпочтения представимы, например, функцией $U(X, Y) = X^a Y^{-b}$, где антиблагом является Y, предельная полезность которого отрицательна при любых его количествах в наборе: $MU_Y = -bX^a Y^{-(b+1)} < 0$; предельная норма замещения для данных предпочтений будет всегда положительной (кривые безразличия имеют положительный наклон).

(д) Предпочтения потребителя таковы, что существует точка насыщения. Функция полезности агента имеет вид

$$U(X,Y) = U^{\max} - \left[(a - X)^2 + (b - Y)^2\right].$$

В точке насыщения, координаты которой – (a, b), агент получает максимальную полезность: $U^{\max} = U(a, b)$.

Задание 1.6

Предпочтения агента описываются функцией полезности Кобба – Дугласа. Формируемые наборы включают k благ. Доказать, что предельная норма замещения j-м благом i-го блага (MRS_{ji}) является функцией количеств только двух благ: z_i и z_j.

Решение и ответ

Функция Кобба – Дугласа описывает стандартные предпочтения. Для случая k благ функция полезности имеет вид

$$U(z_1, z_2, \ldots, z_k) = \prod_{i=1}^{k} z_i^{a_i}.$$

По определению, предельная норма замещения j-м благом i-го блага вычисляется по формуле

$$MRS_{ji} = \frac{\Delta z_j}{\Delta z_i} = -\frac{MU_i(\cdot)}{MU_j(\cdot)}. \tag{1}$$

Для удобства преобразуем функцию полезности и запишем ее в следующем виде:

$$U\left(z_1, z_2, \ldots, z_k\right) = \prod_{i=1}^{k} z_i^{a_i} = z_i^{a_i} z_j^{a_j} \prod_{m=1}^{k} z_m^{a_m} = F \cdot z_i^{a_i} z_j^{a_j},$$

где $m \neq i$, $m \neq j$, а константа F может быть представлена следующим образом:

$$F = \prod_{m=1}^{k} z_m^{a_m}.$$

Продифференцируем эту функцию по z_i и по z_j, чтобы получить функции предельных полезностей:

$$MU_i\left(\cdot\right) = a_i \cdot F \cdot z_i^{a_i - 1} z_j^{a_j}; \qquad (2)$$

$$MU_j\left(\cdot\right) = a_j \cdot F \cdot z_i^{a_i} z_j^{a_j - 1}. \qquad (3)$$

Подставим формулы (2) и (3) в формулу (1). Получим:

$$MRS_{ji} = -\frac{MU_i\left(\cdot\right)}{MU_j\left(\cdot\right)} = -\frac{a_i \cdot F \cdot z_i^{a_i - 1} z_j^{a_j}}{a_j \cdot F \cdot z_i^{a_i} z_j^{a_j - 1}} = -\frac{a_i z_j}{a_j z_i} = \varphi(z_i, z_j). \qquad (4)$$

Из формулы (4) следует, что MRS_{ji} является функций двух переменных – количества блага *j*-го вида и количества блага *i*-го вида, что и требовалось доказать.

Задание 1.7

Определить все предельные нормы замещения в потреблении для функции полезности:

$$U\left(\overline{Z}\right) = z_1^{1/6} z_2^{1/3} z_3^{1/2}.$$

Решение и ответ

Представленная функция может быть охарактеризована через три прямые предельные нормы замещения и три обратные.

Будем использовать формулу (4), выведенную при решении задачи 1.6:

$$MRS_{ji} = -\frac{MU_i(\cdot)}{MU_j(\cdot)} = -\frac{a_i z_j}{a_j z_i}.$$

С помощью данной формулы получим:

$$MRS_{21} = -\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} \cdot \frac{z_2}{z_1} = -0,5\frac{z_2}{z_1};\ MRS_{31} = -\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{z_3}{z_1} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{z_3}{z_1};$$

$$MRS_{32} = -\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{z_3}{z_2} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{z_3}{z_2};\ MRS_{12} = (MRS_{21})^{-1} = -\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}} \cdot \frac{z_1}{z_2} = -2\frac{z_1}{z_2};$$

$$MRS_{13} = (MRS_{31})^{-1} = -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{6}} \cdot \frac{z_1}{z_3} = -3\frac{z_1}{z_3};$$

$$MRS_{23} = (MRS_{32})^{-1} = -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} \cdot \frac{z_2}{z_3} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{z_2}{z_3}.$$

Задание 1.8

Известно, что предпочтения агента X описывает функция полезности Кобба – Дугласа вида: $U(z_1, z_2) = z_1^{0,5} \cdot z_2^{0,5}$. Агент X имеет возможность совершить выбор среди четырех наборов, состав которых представлен векторами: $\overline{A} = (9; 1)$; $\overline{B} = (1; 9)$; $\overline{C} = (4; 1)$; $\overline{D} = (1; 4)$.

(а) Охарактеризуйте предпочтения агента X, заданные на перечисленных наборах.

(б) Какое из приведенных преобразований отражает те же предпочтения, что и исходная функция полезности:

(I) $\bar{U} = \ln U$;

(II) $\bar{U} = U^{\alpha}$, где $\alpha > 0$;

(III) $\bar{U} = U^{\beta}$, где $\beta < 0$;

(IV) $\bar{U} = A \cdot U$, где $A > 0$;

(V) $\bar{U} = U + K$, где $K = \text{const}$; $K \in (-\infty, +\infty)$?

Решения и ответы

(а) Предпочтения агента стандартны. Исходя из их описания с помощью функции полезности представленные наборы упорядочиваются следующим образом: $\bar{A} \sim \bar{B} \succ \bar{C} \sim \bar{D}$, поскольку: $U(\bar{A}) = 3 = U(\bar{B}) > U(\bar{C}) = 2 = U(\bar{D})$.

(б) Представленные в пунктах (I), (II), (IV), (V) преобразования исходной функции полезности являются монотонно возрастающими и не меняют порядок предпочтений; преобразование в пункте (III) меняет порядок предпочтений на обратный и не является монотонно возрастающим.

2. БЮДЖЕТНОЕ ОГРАНИЧЕНИЕ ПОТРЕБИТЕЛЯ

2.1. Формализация бюджетного ограничения

В денежной экономике, независимо от типа предпочтений, потребитель вынужден считаться с возможностями выбора. Возможности выбора регулируются бюджетным ограничением, т. е. величиной бюджета (той частью располагаемого дохода, которая предназначена на цели потребления текущего периода) и сложившимися на рынках потребительских благ ценами. Величина бюджета текущего периода зависит от суммы получаемых факторных доходов $\sum_{j=1}^{m} I_j$, величины чистых налогов[20] (NT) и сбережений текущего периода (Sav). Рассчитывается величина бюджета по формуле

$$B = \sum_{j=1}^{m} I_j - NT - Sav. \qquad (2.1)$$

Бюджетное ограничение потребителя в общем виде может быть представлено следующим неравенством, где B – величина бюджета, p_i – цена i-го блага, z_i – количество i-го блага:

$$B - \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot z_i \geq 0. \qquad (2.2)$$

Экономический смысл бюджетного ограничения: при формировании набора благ суммарные расходы потребителя не могут превышать величину бюджета.

Совокупность наборов, удовлетворяющих бюджетному ограничению, среди которых может осуществляться потребительский

[20] Чистые налоги – налоги (T) за вычетом трансфертов (R), получаемых домашним хозяйством: $NT = T - R$.

выбор, называется *бюджетным множеством*. При этом следует учитывать, что количества благ в наборе неотрицательны: $z_i \geq 0,\ \forall i = \overline{1, n}$. Если бюджетное ограничение (2.2) выполняется в виде строгого равенства, получаем совокупность наборов благ, лежащих на границе бюджетного множества.

Бюджетное множество в случае, когда цены благ неизменны, является выпуклым. Невыпуклость бюджетного множества может иметь место, например, при предоставлении скидки (системы скидок).

2.2. Графический анализ бюджетного ограничения

В случае формирования набора из двух благ бюджетное ограничение имеет вид

$$B - p_1 z_1 - p_2 z_2 \geq 0. \tag{2.3}$$

Из бюджетного ограничения можно получить уравнение бюджетной линии (бюджетной прямой[21]):

$$z_2 = \frac{B}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} z_1. \tag{2.4}$$

Бюджетная линия ограничивает множество доступных наборов при данном бюджете и определенных ценах, сложившихся на рынках благ. Бюджетная линия (2.4) представлена на рис. 2.1.

Тангенс угла наклона бюджетной линии определяется коэффициентом перед z_1 в формуле (2.4) и равен $-\frac{p_1}{p_2}$. Иногда этот коэффициент называют *предельной нормой замещения благ в обмене, MRSE,* или *коэффициентом трансформации*:

$$t_{21} = MRSE_{21} = -\frac{p_1}{p_2} = \operatorname{tg} \alpha. \tag{2.5}$$

[21] Поскольку домашнее хозяйство выступает ценополучателем на рынке благ, бюджетная линия является бюджетной прямой: количество второго блага линейно зависит от объема покупок первого блага.

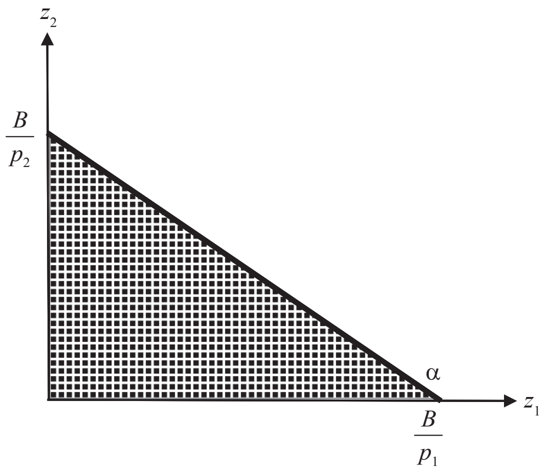

Рис. 2.1. Бюджетная линия и бюджетное множество

Экономический смысл коэффициента трансформации благ: альтернативные издержки приобретения первого блага. То есть данный коэффициент показывает, от какого количества второго блага необходимо отказаться, чтобы приобрести единицу первого блага, находясь на бюджетной линии.

Положение бюджетной линии не изменяется до тех пор, пока не изменятся величина бюджета, относительные цены благ или одновременно в разных направлениях и пропорциях не поменяются бюджет и относительные цены.

Бюджетное ограничение и бюджетная линия могут рассматриваться также для случая, когда в наборе присутствует одно благо конкретного вида (например, благо x) и агрегированное благо (композитный товар) y, количество которого измеряется в денежных единицах. По сути, агрегированное благо – расходы на прочие товары. Цена агрегированного блага всегда принимается за единицу. В этом случае используется система координат «количество блага (x) – расходы на прочие товары (y)». Бюджетное ограничение будет иметь вид:

$$B - p_x x - y \geq 0. \tag{2.6}$$

Уравнение бюджетной прямой примет вид:

$$y = B - p_x x. \tag{2.7}$$

Угол наклона бюджетной линии – α, при этом $\operatorname{tg}\alpha = -p_x$.

2.3. Изменения в бюджетном ограничении

Бюджетное ограничение изменяется в случае изменения величины бюджета. Бюджетная линия сдвигается параллельно вправо (при увеличении бюджета) или параллельно влево (при уменьшении бюджета). Влияние изменений бюджета на положение бюджетной линии показано на рис. 2.2. Наклон бюджетной линии не меняется, поскольку цены остаются неизменными. Соответственно коэффициент трансформации благ во всех случаях одинаков и равен тангенсу α.

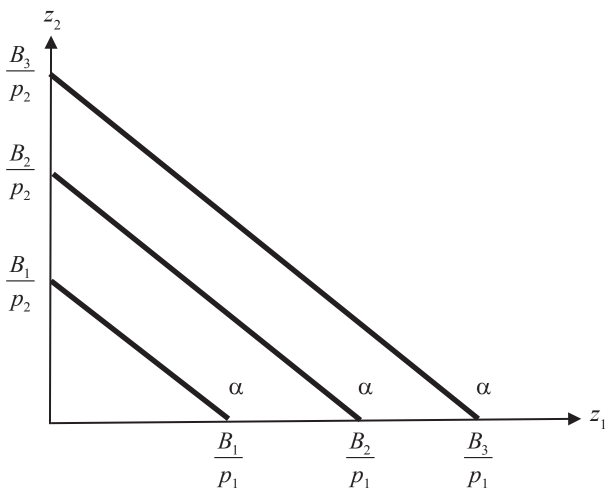

Рис. 2.2. Положение бюджетной линии
при изменении величины бюджета

Бюджетное ограничение будет претерпевать изменения при изменении цен благ. При этом важно понимать, что изменение цены одного из благ или непропорциональное изменение цен обоих благ приводят к изменению структуры системы цен, или относительных цен. Следовательно, будут изменяться коэффициент трансформации благ и угол наклона бюджетной линии.

На рис. 2.3 показаны изменения в положении бюджетной линии, обусловленные изменениями относительных цен вследствие изменений в уровне цены первого блага. Цена первого блага последовательно снижается так, что $p_1^0 > p_1^1 > p_1^2$. Соответственно бюджетные линии становятся все более пологими.

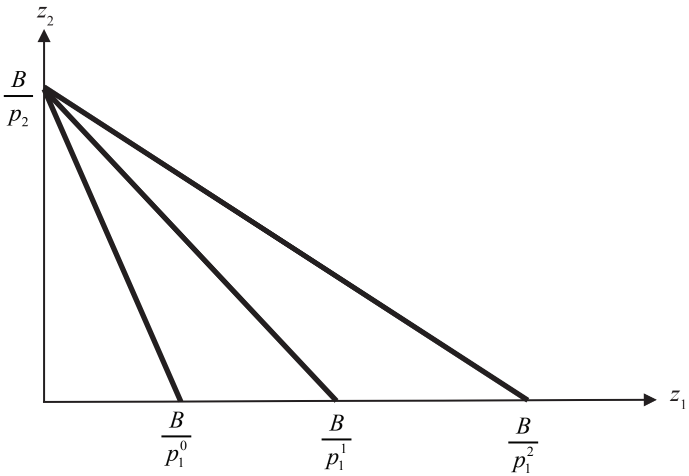

Рис. 2.3. Положение бюджетной линии
при изменении цены первого блага

Бюджетное ограничение может быть представлено как совокупность ограничений. В этом случае бюджетная линия имеет вид графика кусочно-непрерывной функции, т. е. на линии появляются изломы или разрывы. Такого рода конфигурация бюджетной линии может быть обусловлена предоставлением агенту натуральной субсидии, натуральной премии, гуманитарной помощи. Изломы бюджетной линии возникают и в случаях предоставления агенту ценовых скидок (при нелинейном ценообразовании); применения наценок и штрафов; налогов на потребление блага, включаемых в цену покупки[22]. Бюджетные линии для подобных случаев, как правило, удобно представлять в системе координат «количество i-го блага (z_i) – количество агрегированного блага (E)». Количество агрегированного блага (композитного товара) можно интерпретировать как расходы на прочие товары. Подобное представление бюджетной линии и бюджетного ограничения позволяет оценить последствия субсидий, налогов и т. п. для возможностей выбора.

Типовые задания с решениями и ответами

Задание 2.1

Представьте на графике бюджетную линию в случае, когда потребитель получает натуральную премию в размере Δz_i при условии приобретения им i-го блага в некотором объеме z_i^*. Каковы последствия натурального премирования для покупателя? Какие цели преследует фирма-продавец, предоставляя натуральную премию? Каковы условия достижения цели?

Решение и ответ

Получение премии расширяет потенциальные возможности выбора. Однако следует понимать, что агент не обязательно будет стремиться к выполнению условий продавца. Получение премии действительно расширит возможности выбора, если в оптимальный набор агент решит включить данное благо в объеме, не меньшем z_i^*. Бюджетная линия, не меняя наклона, фрагментарно смещается вправо, и на величину натуральной премии увеличивается максимально доступное количество первого блага.

Как правило, фирмы при предоставлении натуральной премии создают условия, препятствующие перепродаже полученных единиц блага. Это легко осуществить в случае персонифицированных продаж, например при реализации услуг. На рис. 2.4 представлена

[22] Бюджетные линии для ряда указанных случаев рассматриваются в подразделе «Типовые задания с ответами и решениями» в конце данной главы.

бюджетная линия после получения агентом натуральной премии. Бюджетная линия построена в системе координат «количество i-го блага – расходы на прочие блага, E».

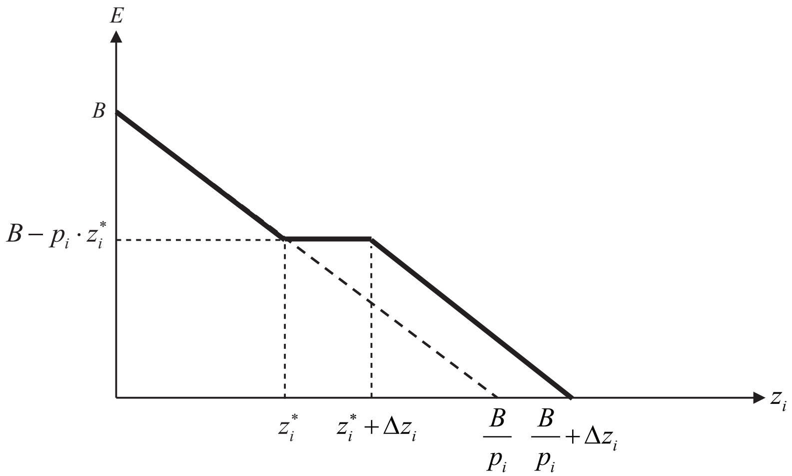

Рис. 2.4. Бюджетная линия в случае натуральной премии

Задание 2.2

Изобразите на графике бюджетную линию для случая, когда агенту предоставляется натуральная субсидия Δz_i, имеющая безусловный характер. Агент может продать полученное благо по действующей рыночной цене.

Решение и ответ

Поскольку агент может продать получаемое количество блага, он тем самым расширяет возможности выбора. Денежная оценка натуральной субсидии определяется как $\Delta B = p_i \cdot \Delta z_i$. Следует отметить, что для агентов, не включающих в набор i-е благо, предпочтительнее получать денежную субсидию. Такие агенты будут стремиться к перепродаже благ, полученных в виде натуральной субсидии. Для агентов, потребляющих i-е благо, оба варианта (денежная или натуральная субсидия) эквивалентны (рис. 2.5).

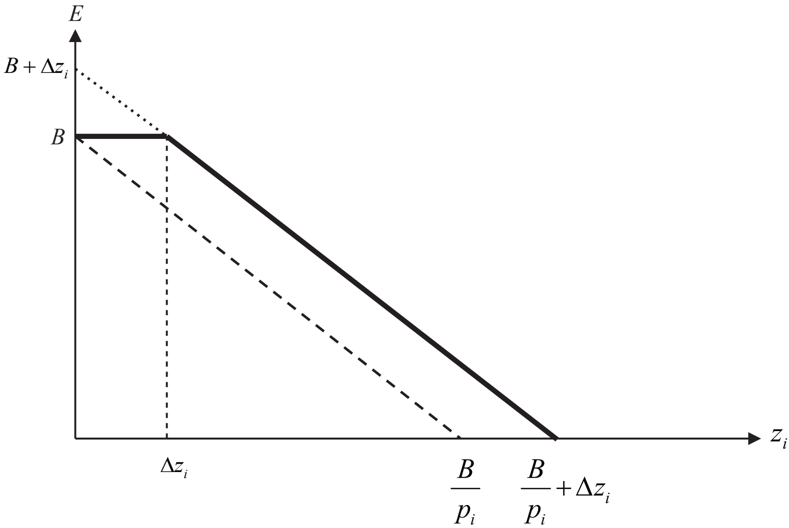

Рис. 2.5. Бюджетная линия в случае натуральной субсидии

Задание 2.3

Рассмотрите графически ситуацию, когда потребитель имеет возможность приобретения первого блага по льготной цене (цене с дисконтом). Право получения дисконта агент получает при выполнении условия продавца: купить благо в объеме не менее z_i^*.

Решение и ответ

Право покупки по льготной цене $(p_1 - \tau)$ предоставляется покупателю при условии предшествующей покупки блага в объеме не менее z_i^*. Угол наклона исходной бюджетной линии – α, угол наклона новой бюджетной линии – β. Возможность покупки блага по льготной цене, безусловно, расширяет возможности потребительского выбора (ослабляет бюджетное ограничение). Бюджетная линия фрагментарно меняет угол наклона, становясь более пологой в случае покупок по цене с дисконтом. Льготная цена увеличивает максимально доступное количество блага первого вида:

$$\tilde{z}_1^{\max} = z_1^* + \frac{B - p_1 \cdot z_1^*}{p_1 - \tau} = \frac{B - \tau \cdot z_1^*}{p_1 - \tau}.$$

Графически ответ проиллюстрирован на рис. 2.6.

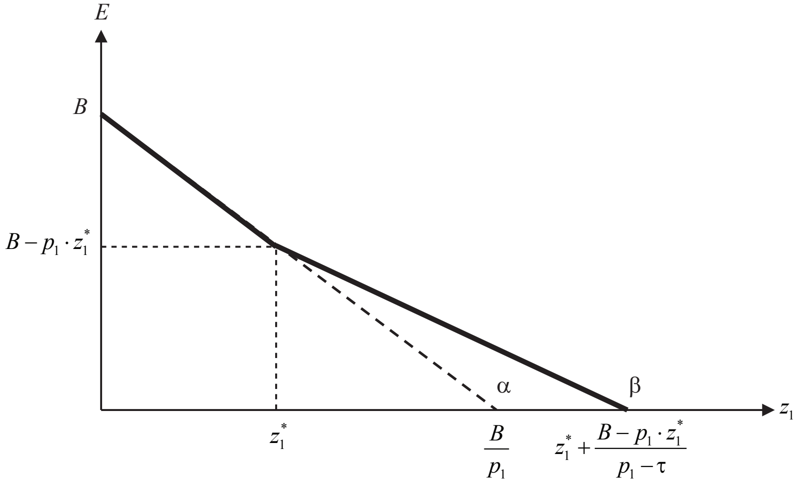

Рис. 2.6. Бюджетная линия в случае приобретения первого блага по цене с дисконтом

Продавец блага может предложить покупателю систему скидок, стимулируя увеличение объема покупок. При этом величина скидки будет тем больше, чем больше приобретаемый объем блага. В случае системы скидок бюджетная линия будет иметь несколько точек излома.

Задание 2.4

Представьте на графике бюджетную линию агента в условиях, когда потребление каждой дополнительной единицы первого блага сверх объема z_i^* предполагает уплату наряду с рыночной ценой налога по ставке t.

Решение и ответ

Введение налога на потребление обусловливает ужесточение бюджетного ограничения, уменьшает возможности выбора и максимально доступное количество блага (в данном случае – первого вида). Бюджетная линия приобретает излом.

Потребитель вынужден уплачивать за каждую единицу блага бóльшую цену при условии превышения объемом потребления уровня z_i^*: новая цена составит величину $(p_1 + t)$. Изменение цены первого блага обусловит изменение угла наклона бюджетной линии. Если угол наклона исходной бюджетной линии – α, то угол наклона новой бюджетной линии – β (рис. 2.7). Налог на потребление приводит к «отсечению» части ранее доступных наборов. (Аналогичные изменения в конфигурации бюджетной линии возникнут также в случае, например, отмены льготного тарифа при превышении социальной нормы потребления блага.)

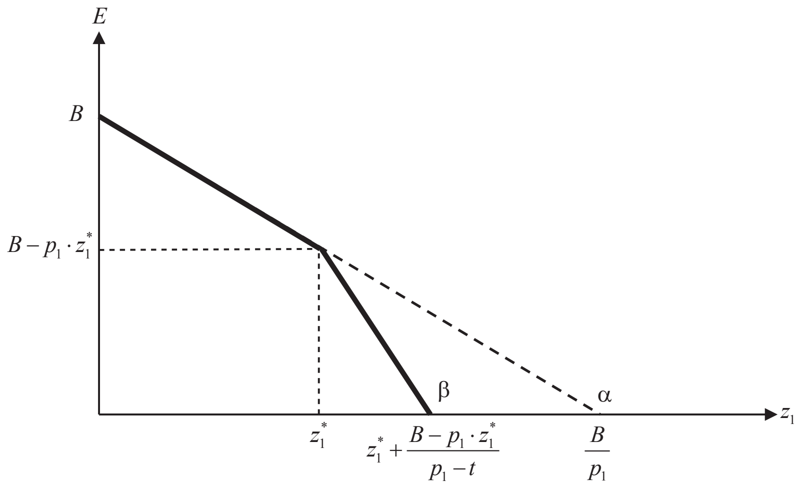

Рис. 2.7. Бюджетная линия в случае приобретения первого блага по цене с налогом

Максимально доступное количество первого блага при введении налога на потребление составит:

$$\overline{z}_1^{\max} = z_1^* + \frac{B - p_1 \cdot z_1^*}{p_1 + t} = \frac{B + t \cdot z_1^*}{p_1 + t}.$$

Задание 2.5

Потребитель *A* располагает суммой в 120 руб. и собирается потратить ее на покупку товаров *X* и *Y*. Цены товаров – 20 и 10 руб. соответственно. Необходимо:

(а) определить бюджетное ограничение потребителя *A*;

(б) составить уравнение бюджетной линии как границы бюджетного множества;

(в) дать описание множества доступных агенту наборов.

Решения и ответы

(а) Бюджетное ограничение потребителя *A* определяется действующими на рынке ценами и количеством денег, предназначенных для покупок. Приобретая наборы благ, агент не может потратить денег больше, чем он имеет. Вид бюджетного ограничения потребителя *A*: $120 - 20x - 10y \geq 0$.

(б) Уравнение бюджетной линии как границы бюджетного множества для данного агента имеет вид: $y = 12 - 2x$.

(в) Совокупность доступных агенту наборов, или бюджетное множество, для данного агента описывается системой

$$\begin{cases} y \leq 12 - 2x, & \text{если } 0 \leq x \leq 6, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Графически бюджетное множество ограничено положительными направлениями осей абсцисс и ординат и бюджетной линией. Бюджетное множество состоит из наборов, расположенных левее и ниже бюджетной линии; правее оси ординат; выше оси абсцисс.

Задание 2.6

Домашнее хозяйство X имеет бюджет B и может использовать его на покупку двух товаров (z_1, z_2) по ценам (p_1, p_2); $p_i > 0$. Рассмотрите конфигурацию бюджетной линии в случаях предоставления агенту:

(а) натуральной субсидии в размере Δz_2;

(б) премии в натуральном выражении величиной Δz_2 при условии приобретения блага в объеме не менее z_2^*.

Для каждого пункта задания необходимо построить график, указав координаты точек, общих с осями координат, и точек излома бюджетной линии.

Решения и ответы

(а) Получение агентом натуральной субсидии в размере Δz_2 означает параллельный сдвиг вправо бюджетной линии. При этом максимально доступное количество первого блага не меняется (рис. 2.8).

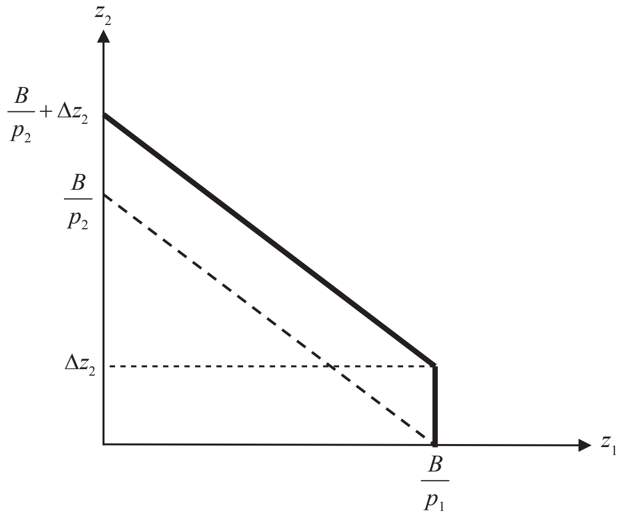

Рис. 2.8. Бюджетная линия в случае предоставления агенту натуральной субсидии

(б) Получение агентом премии в натуральном выражении величиной Δz_2, как правило, требует, чтобы он выполнил условие продавца и приобрел второе благо в объеме не меньше z_2^*. В этом случае бюджетная линия, не меняя наклона, фрагментарно сместится вверх, и у нее появится вертикальная «ступенька», длина которой показывает величину натуральной премии (рис. 2.9). Максимально доступное количество первого блага не меняется.

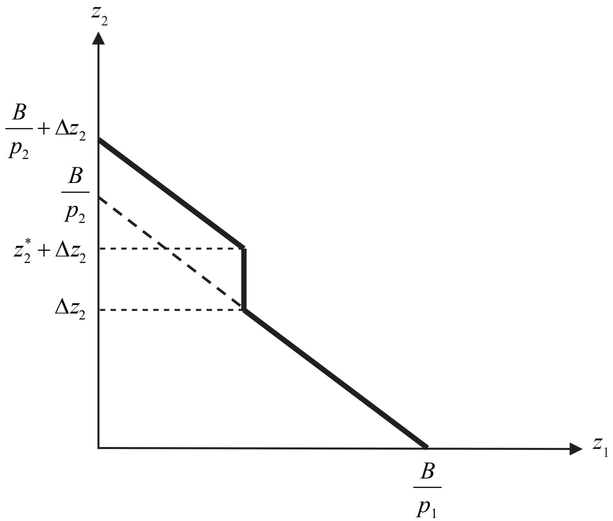

Рис. 2.9. Бюджетная линия в случае предоставления агенту натуральной премии

Задание 2.7

Некоторое домохозяйство приобретает товар x. В случае, когда благо приобретается в объеме $x \geq x_1$, вводится налог на потребление со ставкой T, определенной в денежных единицах.

(а) Как изменится в этом случае вид бюджетной линии?

(б) Повлияет ли на конфигурацию бюджетной линии тот факт, что ставка налога будет определяться в процентах?

Решения и ответы

Пусть агент приобретает благо x и композитный товар y, цена которого, по определению, равна 1. Тогда максимально доступное количество блага y равно величине бюджета M. Максимально доступное количество блага определяется величиной бюджета и ценой этого блага:

$$x^{\max} = \frac{M}{p_x}.$$

(а) В случае введения налога максимально доступное количество этого блага уменьшится и составит:

$$\tilde{x}^{\max} = x_1 + \frac{M - p_x \cdot x_1}{(p_x + T)}.$$

Бюджетная линия фрагментарно изменит наклон и станет более крутой при $x \geq x_1$. Графически бюджетная линия будет иметь вид, аналогичный тому, который представлен на рис. 2.7.

(б) Ставка налога T, определенная в процентах, не повлияет на конфигурацию бюджетной линии. Однако максимально доступный объем блага x будет определяться иначе, по формуле

$$\hat{x}^{\max} = x_1 + \frac{M - p_x \cdot x_1}{(1+T)p_x}.$$

Задание 2.8

Потребитель формирует набор из двух благ, x и y. Его бюджет составляет 100 ден. ед, а вектор цен: $\overline{P}$ = (10; 5). Кроме того, потребитель получает гуманитарную помощь, состоящую из этих товаров, $\overline{H}$ = (5; 5), которую он может продать по ценам в 2 раза ниже рыночных. Изобразите бюджетное ограничение данного потребителя и укажите координаты всех точек излома бюджетной линии. Отметьте на графике наборы благ, ставшие доступными:

(а) благодаря получению гуманитарной помощи;

(б) вследствие перепродажи товаров, в нее входящих.

Решения и ответы

(а) Исходная бюджетная линия и ее изменение после получения гуманитарной помощи приведены на рис. 2.10.

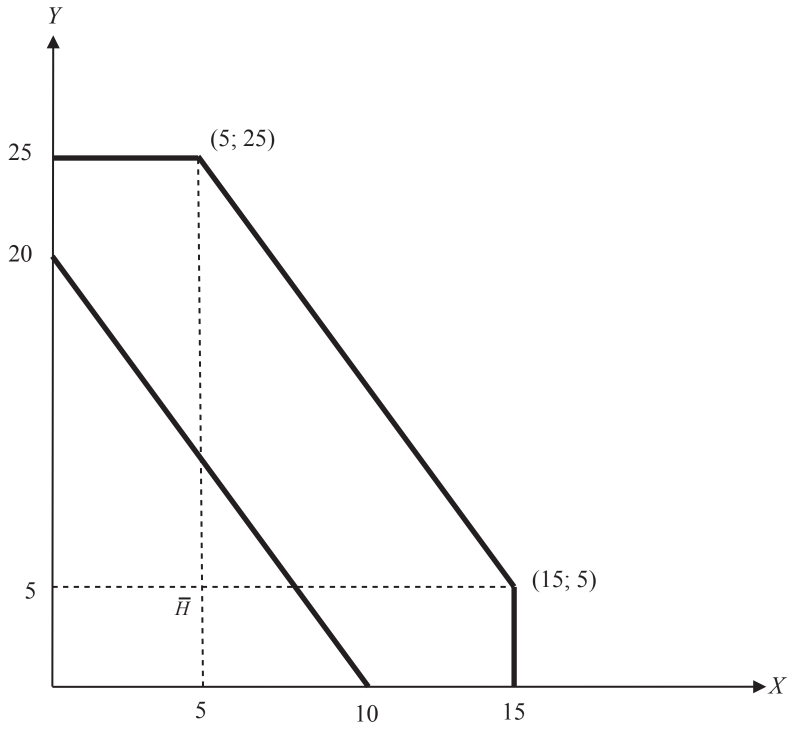

Рис. 2.10. Бюджетная линия в случае получения агентом гуманитарной помощи

Следует обратить внимание на то, что даже в случае расходования на одно из благ всего бюджета доступный объем другого будет положителен и равен количеству соответствующего блага из гуманитарной помощи. Максимально доступные количества благ составят 15 и 25 единиц соответственно. На указанном рисунке представлены исходная бюджетная линия (тангенс угла наклона равен −2); ломаная бюджетная линия с учетом полученной гуманитарной помощи (тангенс угла наклона равен −2; появляются горизонтальный и вертикальный фрагменты); точки излома новой бюджетной линии. Получение гуманитарной помощи означает для агента расширение возможностей выбора.

Формальное описание нового бюджетного множества таково:

$$\begin{cases} y \le 35 - 2x, \quad \text{если}\, 5 \le x \le 15, \\ y \le 25, \quad \text{если}\, 0 \le x \le 5, \\ y \le 5, \quad \text{если}\, x = 15, \\ x \ge 0, \\ y \ge 0. \end{cases}$$

Графически бюджетное множество также представлено на рис. 2.10.

(б) Если у агента появится возможность перепродажи компонентов гуманитарной помощи, бюджетное множество в еще большей степени расширится. Перепродажа компонентов гуманитарной помощи по ценам ниже рыночных обусловливает то, что горизонтальный и вертикальный участки бюджетной линии (рис. 2.11) приобретают отрицательный наклон. Тангенс угла наклона бывшего горизонтального участка равен

$$\frac{0,5 p_x}{p_y} = -1;$$

тангенс угла наклона бывшего вертикального участка равен

$$\frac{p_x}{0,5 p_y} = -4.$$

Формальное описание нового бюджетного множества:

$$\begin{cases} y \le 35 - 2x, \; \text{если} \;\; 5 \le x \le 15, \\ y \le 30 - x, \quad \text{если} \;\; 0 \le x \le 5, \\ y \le 65 - 4x, \; \text{если} \;\; 15 \le x \le 16,25, \\ x \ge 0, \\ y \ge 0. \end{cases}$$

Графически бюджетное множество представлено на рис. 2.11.

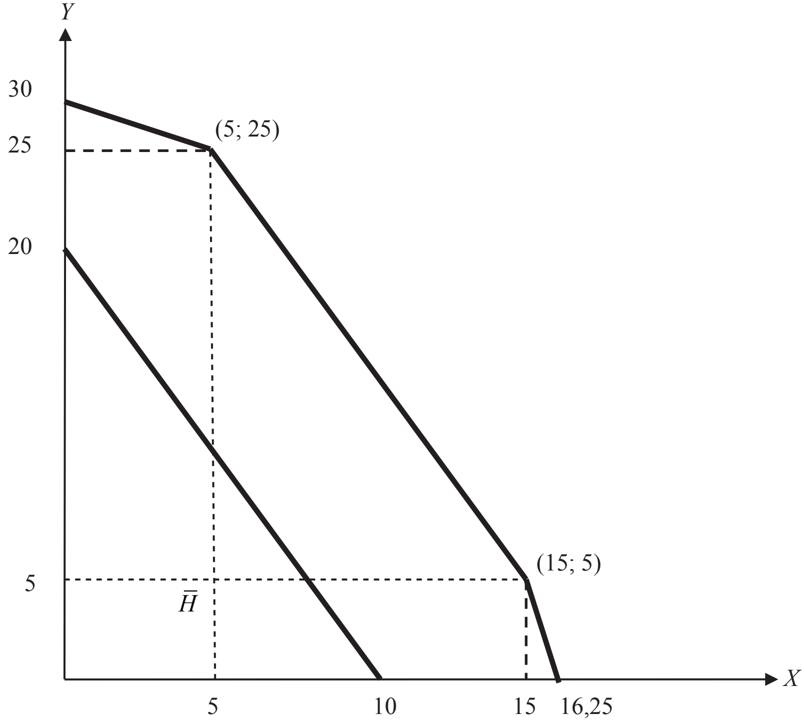

Рис. 2.11. Бюджетная линия в случае перепродажи агентом гуманитарной помощи

Таким образом, возможность перепродажи агентом компонентов полученной им гуманитарной помощи обусловливает расширение возможностей выбора. Бюджетная линия приобретает две точки излома. Бюджетное множество остается выпуклым.

3. МОДЕЛЬ ПОВЕДЕНИЯ ПОТРЕБИТЕЛЯ И ОПТИМАЛЬНЫЙ НАБОР БЛАГ

3.1. Задача потребителя и ее формализация

Поведение потребителя, формирующего набор благ, можно описать, прибегнув к формальным методам. Предпосылка о рациональности поведения потребителя предполагает рассмотрение его выбора с позиций поиска наилучшего при имеющихся ограничениях (оптимального) набора.

Ц е л ь   п о т р е б и т е л я – наиболее полное удовлетворение имеющихся потребностей посредством использования набора различных благ.

Формализация цели подразумевает, что потребитель стремится сформировать набор благ, обеспечивающий максимальную полезность. Тогда можно выписать целевую функцию потребителя. Она имеет вид:

$$\max U(z_1, z_2, \ldots, z_n). \tag{3.1}$$

При формировании набора благ потребитель не может выйти за рамки бюджетного ограничения, представленного уравнением (2.2). Следовательно, бюджетное ограничение должно быть включено в модель. Поскольку речь идет об агенте-потребителе, в качестве ограничений в модели также будут присутствовать ограничения на неотрицательность компонентов набора:

$$z_i \geq 0, \; \forall\, i = \overline{1, n}. \tag{3.2}$$

Объединив целевую функцию (3.1), бюджетное ограничение вида (2.2) и ограничения на количества благ в наборе (3.2), можем сформулировать модель поведения потребителя:

$$\begin{cases} \max\limits_{z_1, z_2, \ldots, z_n} U\left(z_1, z_2, \ldots, z_n\right), \\ B - \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot z_i \geq 0, \\ z_i \geq 0, \forall\, i = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{3.3}$$

Модель поведения потребителя (3.3) применима для любых типов предпочтений и, соответственно, функций полезности. Результатом анализа модели является оптимальный набор для потребителя, имеющего определенные предпочтения и принимающего решения при заданных бюджете и ценах. Оптимальным является набор, который нельзя улучшить при действующем ограничении (ограничениях).

Исходя из целевой функции и ограничений модели поведения потребителя можно сформулировать *правило выбора*: потребитель будет выбирать среди доступных наборов тот, который имеет максимальную для него полезность.

3.2. Метод неопределенных множителей Лагранжа для задачи на максимум полезности

Универсальным методом решения задач потребителя является метод неопределенных множителей Лагранжа (метод Лагранжа). Данный метод позволяет решать не только прямые задачи потребителя (на максимум полезности при ограничении на расходы), но и двойственные задачи (на минимум потребительских расходов при ограничении на величину полезности набора), о которых речь пойдет ниже.

Метод Лагранжа применим для предпочтений любых типов, в том числе немонотонных и невыпуклых предпочтений; успешно используется для определения состава оптимального набора при любом количестве благ (n), входящих в набор[23].

Для анализа модели поведения потребителя в общем виде (3.3) с помощью метода неопределенных множителей Лагранжа необходимо построить лагранжиан (функцию Лагранжа), который далее мы будем максимизировать. Для нашей модели лагранжиан – функция (n + 1) переменной, где z_i – компоненты потребительского набора, а λ – неопределенный множитель Лагранжа, оценка ограниченного ресурса, которым в нашей модели является бюджет (доход). Лагранжиан имеет вид:

$$\mathcal{L}\left(z_1, z_2, \ldots, z_n, \lambda\right) = U\left(z_1, z_2, \ldots, z_n\right) + \lambda\left(B - \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot z_i\right). \quad (3.4)$$

Теперь модель (3.3) модифицирована и представлена в виде функции Лагранжа (3.4). Будем решать задачу на безусловный экстремум функции Лагранжа:

$$\mathcal{L}\left(z_1, z_2, \ldots, z_n, \lambda\right) \to \max. \quad (3.5)$$

В представленной формулировке необходимыми условиями (F.O.C.) достижения лагранжианом экстремума является неположительность первых n частных производных (по z_i) и неотрицательность производной по λ. Для решения воспользуемся условиями Куна – Таккера (*Kuhn – Tucker conditions*), которые для нашей задачи будут иметь вид системы, состоящей из 3 · (n + 1) уравнений.

---

[23] В случае, когда $n = 2$, поиск оптимального набора может осуществляться посредством решения задачи на условный экстремум. При $n > 2$ этот метод не применим, поскольку в модели два уравнения (целевая функция и ограничение), а количество неизвестных – более двух. Соответственно «в лоб» задача решена быть не может.

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \mathcal{L}(z_1^0, z_2^0, \ldots, z_n^0, \lambda^0)}{\partial z_i} = \dfrac{\partial U(z_1^0, z_2^0, \ldots, z_n^0)}{\partial z_i} - \lambda^0 \cdot p_i \le 0, \ \forall i = \overline{1, n} \ (\mathrm{I}), \\
\dfrac{\partial \mathcal{L}(z_1^0, z_2^0, \ldots, z_n^0, \lambda^0)}{\partial z_i} \cdot z_i^0 = \\
= \left[\dfrac{\partial U\left(z_1^0, z_2^0, \ldots, z_n^0\right)}{\partial z_i} - \lambda^0 \cdot p_i \right] \cdot z_i^0 = 0, \ \forall i = \overline{1, n} \ (\mathrm{II}), \\
z_i^0 \ge 0, \ \ \forall i = \overline{1, n} \ (\mathrm{III}), \\
\dfrac{\partial \mathcal{L}(z_1^0, z_2^0, \ldots, z_n^0, \lambda^0)}{\partial \lambda} = B - \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot z_i^0 \ge 0 \ (\mathrm{IV}), \\
\dfrac{\partial \mathcal{L}(z_1^0, z_2^0, \ldots, z_n^0, \lambda^0)}{\partial z_i} \cdot \lambda^0 = \left[B - \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot z_i^0 \right] \cdot \lambda^0 = 0 \ (\mathrm{V}), \\
\lambda^0 \ge 0 \ (\mathrm{VI}).
\end{cases} \tag{3.6}
$$

Решением системы (3.6) является оптимальный для потребителя набор:

$$\overline{Z}^0 = \left(z_1^0, z_2^0, \ldots, z_n^0\right). \tag{3.7}$$

При этом неопределенный множитель Лагранжа λ^0 представляет собой оптимальную оценку дохода (предельную полезность денег в оптимальном наборе).

Оптимальный набор может включать все n видов благ в положительном объеме. В этом случае оптимум потребителя называют *внутренним*. Потребитель может сформировать оптимальный набор, в котором присутствует только одно благо. Такое решение называют *угловым*[24]. В оптимальном наборе может присутствовать

[24] Угловое решение имеет место в случае предпочтений, описываемых рассмотренной ранее аддитивной функцией полезности (блага – совершенные субституты), или в случае невыпуклых предпочтений, например для функции полезности вида $U\left(z_1, z_2\right) = az_1^2 + bz_2^2$.

в положительном объеме *m* видов благ, где $m < n$. Конкретный состав набора определяется на основе решения системы (3.6).

Если предпочтения потребителя немонотонны[25], для формирования набора используется не весь имеющийся бюджет. В случае стандартных (строго монотонных и строго выпуклых) предпочтений оптимальное решение – внутреннее. Решение задач потребителя с функцией полезности Кобба – Дугласа проблем не вызывает. Однако многообразие типов предпочтений предопределяет возможность различного сочетания свойств системы предпочтений и различные типы оптимумов. Алгоритм решения таких нетипичных задач основывается на *условиях дополняющей нежесткости*, которые можно получить из условий Куна – Таккера (3.6).

Из условий (I), (II) и (III) системы уравнений (3.6) получим:

$$z_i^0 > 0, \text{ если } \frac{\partial U\left(z_1^0, z_2^0, \ldots, z_n^0\right)}{\partial z_i} = \lambda^0 \cdot p_i; \tag{3.8}$$

$$z_i^0 = 0, \text{ если } \frac{\partial U\left(z_1^0, z_2^0, \ldots, z_n^0\right)}{\partial z_i} < \lambda^0 \cdot p_i. \tag{3.9}$$

Поскольку $\frac{\partial U(\cdot)}{\partial z_i} = MU_i\left(\cdot\right)$, уравнения (3.8) и (3.9) после ряда преобразований можно записать в виде

$$z_i^0 > 0, \text{ если } \frac{MU_i(z_1^0, z_2^0, \ldots, z_n^0)}{p_i} = \lambda^0; \tag{3.10}$$

[25] Немонотонны предпочтения с точкой насыщения. Когда наступает перенасыщение, благо становится антиблагом (при условии $z_i > z_i^*$). Насыщение и перенасыщение возможно по одному или нескольким (всем) компонентам потребительского набора. Примером функции полезности, описывающей предпочтения с точкой насыщения, может служить функция полезности вида $U\left(z_1, z_2\right) = U^* - \left[\left(a - z_1\right)^2 + \left(b - z_2\right)^2\right]$, где координаты точки насыщения – (a, b); максимальная полезность набора обеспечивается в этой точке и составляет $U^* = U\left(a, b\right)$. В случае подобных предпочтений агент может оставить не использованной часть бюджета, если оказывается, что $B > B^* = p_1 \cdot a + p_2 \cdot b$.

$$z_i^0 = 0, \text{ если } \frac{MU_i(z_1^0, z_2^0, \ldots, z_n^0)}{p_i} < \lambda^0. \tag{3.11}$$

Первое условие дополняющей нежесткости [соотношения (3.10) и (3.11)] применяется в случае монотонных и нестрого выпуклых предпочтений. Выполнение по всем благам условия (3.10) означает, что оптимум – внутренний. Выполнение по ряду благ условия (3.11) свидетельствует о принятии углового решения.

Из условий (IV), (V) и (VI) системы уравнений (3.6) получим:

$$\text{если } B - \sum\nolimits_{i=1}^{n} p_i \cdot z_i^0 = 0, \text{ то } \lambda^0 > 0; \tag{3.12}$$

$$\lambda^0 = 0, \text{ если } B - \sum\nolimits_{i=1}^{n} p_i \cdot z_i^0 > 0. \tag{3.13}$$

Второе условие дополняющей нежесткости [соотношения (3.12) и (3.13)] рассматривается в случае немонотонных предпочтений (предпочтений с точкой насыщения).

Если потребитель имеет бюджет, превышающий величину B^*, достаточную для формирования набора, обеспечивающего полное удовлетворение потребностей, у него остается неиспользованной часть дохода. Предельная полезность дополнительных единиц дохода будет равна нулю. Дополнительные единицы дохода не принесут потребителю дополнительного удовлетворения и не обеспечат дополнительную полезность, поскольку остались не использованными уже имеющиеся средства. В случае, когда предпочтения строго монотонны («чем больше благ в наборе, тем лучше»), предельная полезность денег положительна.

3.3. Метод Лагранжа для классической оптимизационной задачи

Отдельно рассмотрим модель поведения потребителя для случая стандартных предпочтений (строго монотонных и строго выпуклых). Такие предпочтения описываются функцией полезности Кобба – Дугласа. Модель поведения потребителя будет иметь вид классической оптимизационной задачи (3.14).

$$\begin{cases} \max\limits_{z_1,\, z_2,\, \ldots,\, z_n} U\left(z_1, z_2, \ldots, z_n\right), \\ B - \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot z_i = 0, \\ z_i > 0,\ \forall\, i = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{3.14}$$

Решение для классической оптимизационной задачи также основывается на методе неопределенных множителей Лагранжа: строим лагранжиан для задачи (3.14) и максимизируем его. Рассмотрим ($n + 1$) необходимое условие (F.O.C.) достижения лагранжианом экстремума[26]. Возьмем частные производные лагранжиана по всем z_i и λ, приравняем их нулю. Получим систему из ($n + 1$) уравнения вида:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}(z_1^0, z_2^0, \ldots, z_n^0, \lambda^0)}{\partial z_i} = \dfrac{\partial U(z_1^0, z_2^0, \ldots, z_n^0)}{\partial z_i} - \lambda^0 \cdot p_i = 0,\ \forall\, i = \overline{1, n}, \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}(z_1^0, z_2^0, \ldots, z_n^0, \lambda^0)}{\partial \lambda} = B - \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot z_i^0 = 0. \end{cases} \tag{3.15}$$

Из первых n уравнений системы (3.15), осуществив ряд преобразований, получим:

$$\frac{MU_1(z_1^0, z_2^0, \ldots, z_n^0)}{p_1} = \frac{MU_2(z_1^0, z_2^0, \ldots, z_n^0)}{p_2} = \ldots = \\ = \frac{MU_n\left(z_1^0, z_2^0, \ldots, z_n^0\right)}{p_n} = \lambda^0. \tag{3.16}$$

Уравнение (3.16) известно как *условие оптимальности*. Другое встречающееся в литературе название – *эквимаржинальный*

[26] Поскольку предпочтения строго выпуклы и бюджетное множество выпукло, экстремумом лагранжиана будет его максимум.

принцип. Условие оптимальности актуально только для случая внутреннего решения. Экономический смысл условия оптимальности: в оптимальном наборе соотношение предельных полезностей благ с их ценами одинаково и равно оптимальной оценке дохода. Иными словами, не существует направления для улучшения набора при перераспределении дохода. Из условия оптимальности можно получить структуру оптимальных наборов при заданных предпочтениях и действующих на рынках благ ценах. Зная структуру оптимального набора, из бюджетного ограничения получим состав конкретного оптимального набора.

Соотношение предельной полезности блага и его цены называют взвешенной предельной полезностью, оно отражает эффективность покупки и потребления блага, или экономическую эффективность использования блага[27]. Тогда как предельная полезность показывает эффективность использования блага в сфере потребления.

Из первого условия дополняющей нежесткости [соотношения (3.10) и (3.11)], а также из равенства (3.16) можно сделать вывод: благо включается в набор, если его взвешенная предельная полезность – не меньше оптимальной оценки дохода (предельной полезности денег в оптимальном наборе), λ^0.

Последнее уравнение в системе (3.15), выполняющееся как строгое равенство, означает полное использование имеющихся денег на цели приобретения благ.

Итак, была рассмотрена модель поведения потребителя, позволяющая получить представление об оптимальном для потребителя наборе благ, или оптимуме потребителя. Иногда оптимум (оптимальное решение) называют *равновесием потребителя*. Полученный из модели набор $\overline{Z}^0 = \left(z_1^0, z_2^0, \ldots, z_n^0\right)$ будет являться для потребителя наилучшим (оптимальным, равновесным) до тех

[27] Формируя набор, агент отбирает те потребительские блага, которые имеют наибольшую взвешенную предельную полезность. То есть агент, совершая покупку, отслеживает ее эффективность. Эффективность покупки не должна быть меньше предельной полезности денег.

пор, пока не изменятся либо бюджет потребителя, либо цены благ, либо предпочтения агента.

В заключение рассмотрим правило определения величины оптимальной оценки дохода (λ^0) для случаев вырожденных предпочтений, когда предельные полезности отдельных благ не зависят от их количества в наборе, т. е. являются константами. Правило в общем виде выглядит следующим образом:

$$\lambda^0 = \max\left\{\frac{MU_1}{p_1}; \frac{MU_2}{p_2}; \ldots \ \frac{MU_n}{p_n}\right\}. \qquad (3.17)$$

Следует заметить, что взвешенные предельные полезности некоторых благ могут быть функциями количеств этих благ[28]. Однако на правило определения λ^0 данное обстоятельство не влияет. Оптимальная оценка дохода в этом случае будет кусочно-непрерывной функцией.

Если предпочтения потребителя заданы на наборах из двух благ, задача по поиску оптимального набора может решаться как задача на условный экстремум. Для этого потребуется преобразовать бюджетное ограничение и представить его в виде, например,

$$z_2 = f\left(z_1\right) = \frac{B}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} \cdot z_1.$$

Тогда целевая функция примет вид: $U\left(z_1, z_2(z_1)\right)$. Продифференцировав функцию полезности по z_1, получим уравнение с одним неизвестным, решив которое, определим z_1^0. Далее найдем $z_2^0 = f\left(z_1^0\right)$.

Более удобным может быть решение через z_2. Тогда z_1 представим как функцию z_2:

$$z_1 = \varphi\left(z_2\right) = \frac{B}{p_1} - \frac{p_2}{p_1} \cdot z_2.$$

Дальнейшие шаги повторяют алгоритм, рассмотренный выше.

[28] Такого рода ситуация возникает в случае квазилинейных предпочтений, описываемых функцией полезности вида $U\left(z_1, z_2\right) = az_1 + b \cdot f\left(z_2\right)$, где a, b – положительные константы.

Оптимальные решения агента для различного типа предпочтений будут детально рассмотрены далее, в главе 4, посвященной функциям индивидуального спроса.

Наглядность анализа оптимального выбора потребителя обеспечивается использованием графического метода. Недостаток указанного метода заключается в ограниченности его применения: он пригоден только для случая предпочтений, заданных на наборах из двух благ.

Воспользуемся графическим методом анализа, чтобы показать основные типы оптимальных решений. Данный метод анализа предполагает применение аппарата кривых безразличия и графического представления бюджетного множества.

3.4. Графический анализ оптимума потребителя

Рассмотрим случай стандартных предпочтений, формальное описание которых обеспечивает функция полезности Кобба – Дугласа. Оптимальное решение для этого случая представлено на рис. 3.1, где отображено множество доступных для потребителя наборов и приведены кривые безразличия, содержащие различные наборы благ.

Оптимальным для потребителя является набор, отображенный точкой *E*, в которой бюджетная линия касается кривой безразличия. Набор *E* лежит на самой удаленной от начала координат кривой безразличия и принадлежит бюджетному множеству, находясь на его границе. Тангенс угла наклона кривой безразличия в точке *E* показывает величину предельной нормы замещения. Для набора *E* ее величина:

$$MRS_{21}^{E} = \frac{\Delta z_2}{\Delta z_1} = -\frac{MU_1^E}{MU_2^E}.$$

Касательная к кривой безразличия в точке *E* имеет наклон α. Следовательно, $MRS_{21}^{E} = \operatorname{tg}\alpha$.

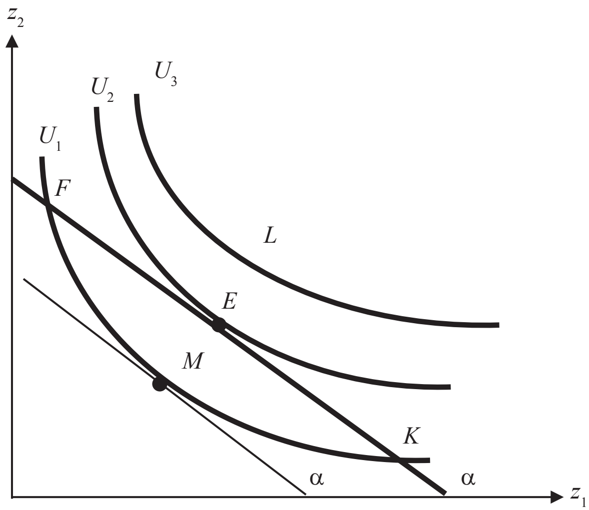

Рис. 3.1. Оптимум потребителя в случае стандартных предпочтений

Наклон бюджетной линии также составляет α:

$$\operatorname{tg}\alpha = t_{21}^{E} = -\frac{p_1}{p_2}.$$

Тогда для набора E справедливо:

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{p_1}{p_2} = -\frac{MU_1^E}{MU_2^E}. \tag{3.18}$$

Преобразовав уравнение (3.18), получим частный (для $n = 2$) случай рассмотренного ранее условия оптимальности (3.16):

$$\frac{MU_1(z_1^E,\ z_2^E)}{p_1} = \frac{MU_2(z_1^E,\ z_2^E)}{p_2}. \tag{3.19}$$

Таким образом, при графическом анализе равновесия потребителя оптимальный набор – точка, в которой бюджетная линия *касается* кривой безразличия. Набор E будет оптимальным для данного агента до тех пор, пока не изменятся либо предпочтения этого агента, либо бюджетное ограничение.

Остановимся на случае вырожденных предпочтений, когда потребитель рассматривает блага в качестве совершенных субститутов. Функция полезности набора имеет вид: $U(z_1, z_2) = az_1 + bz_2$, т. е. предельные полезности благ – положительные константы. В этом случае возможно угловое решение или же оптимальный набор определяется неоднозначно (одна из кривых безразличия совпадает с бюджетной линией). В графическом виде такой случай представлен на рис. 3.2.

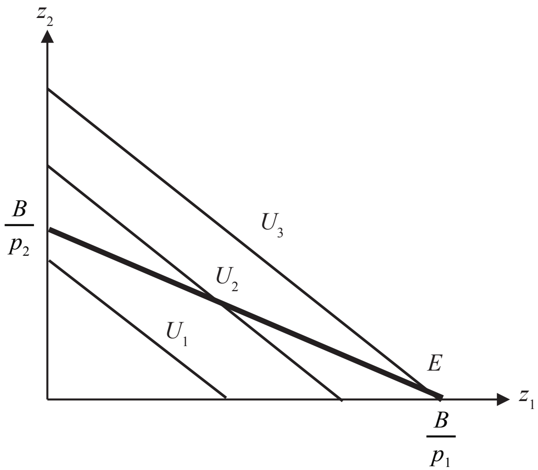

Рис. 3.2. Угловой оптимум (угловое решение)

Наклон кривых безразличия – α, тангенс угла наклона:

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{a}{b}.$$

Тангенс угла наклона бюджетной линии:

$$\operatorname{tg}\beta = -\frac{p_1}{p_2}.$$

При этом $\operatorname{tg}\alpha \neq \operatorname{tg}\beta$.

Оптимума агент достигает при формировании набора, соответствующего точке E: в оптимальном наборе будет присутствовать только первое благо, поскольку $|\mathrm{tg}\,\alpha| > |\mathrm{tg}\,\beta|$ и, следовательно,

$$\frac{a}{p_1} > \frac{b}{p_2}.$$

При ином соотношении предельных полезностей и цен благ в оптимальном наборе может присутствовать только второе благо.

В случае, когда потребитель рассматривает блага в качестве совершенных комплементариев[29], предпочтения описываются функцией полезности леонтьевского типа. Ранее отмечалось, что агент предпочитает не просто совместное использование благ, он включает в набор блага в определенной пропорции, следуя некоторой «технологии потребления». Функция полезности набора для таких предпочтений имеет вид: $U\left(z_1, z_2\right) = \min\left\{az_1; bz_2\right\}$. Для представленной функции полезности технология потребления определяется как

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{z_2^*}{z_1^*} = \frac{a}{b}.$$

Решение потребителя будет внутренним. Особенность этого решения состоит в том, что условие оптимальности в данном случае не выполняется. Оптимальное решение агента представлено на рис. 3.3.

Еще один специфический случай имеет место при изломах бюджетной линии. Так, введение налога на потребление обусловит излом бюджетной линии, показанный на рис. 3.4. Здесь точка оптимума совпадает с точкой излома бюджетной линии: нельзя говорить ни о касании, ни о пересечении бюджетной линией кривой безразличия. Решение будет внутренним, однако условие оптимальности не выполняется. Такого рода решения иногда называют «квазиугловым» равновесием.

---

[29] Блага используются только совместно, образуя потребительский комплекс.

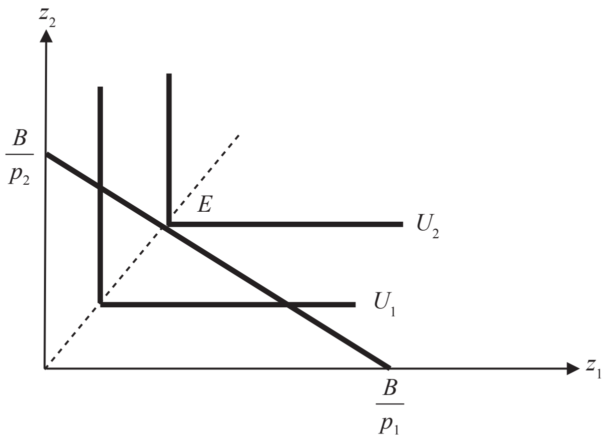

Рис. 3.3. Оптимум потребителя для случая совершенных комплементариев

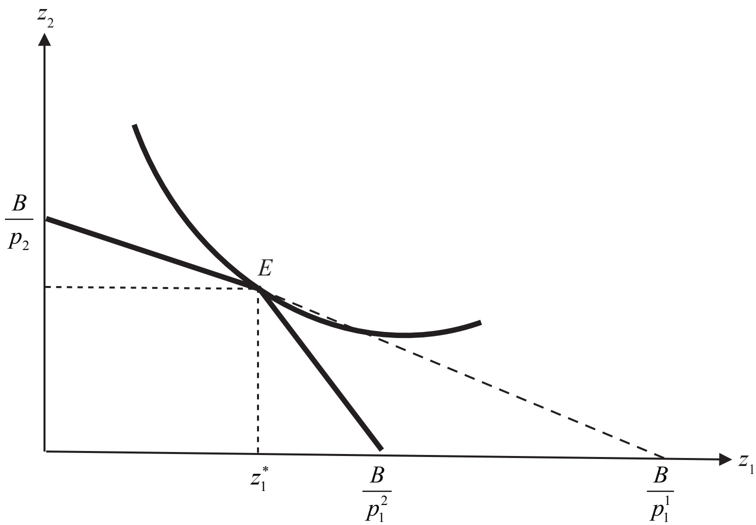

Рис. 3.4. Пример «квазиуглового» равновесия (при покупке первого блага в объеме, превышающем z_1^*, применяется цена с налогом на потребление)

Потребитель последователен в своих решениях. Он будет формировать один и тот же набор в условиях, когда предпочтения устойчивы, а экзогенные параметры (бюджет и цены) – неизменны. Однако оптимум потребителя будет меняться всякий раз, когда параметры бюджетного ограничения варьируют. Анализу изменений в оптимальном наборе вследствие изменения дохода и цен предшествует изучение функций индивидуального спроса на блага, включаемые потребителем в формируемый набор.

Типовые задания с решениями и ответами

Задание 3.1

Предпочтения потребителя X на наборах из трех благ описываются функцией полезности $U\left(\overline{Z}\right)$, заданной дискретно:

$$U\left(\overline{Z}\right) = \sum\nolimits_{i=1}^{3} \sum\nolimits_{j=1}^{k} MU_{ij}(z_i).$$

Блага, включаемые в набор, – неделимы, т. е. все z_i могут принимать только целочисленные значения. Функции предельных полезностей благ имеют следующий вид:

$$MU_1(z_1) = 72 - 8 \cdot (z_1 - 1);$$

$$MU_2(z_2) = 60 - 6 \cdot (z_2 - 1);$$

$$MU_3(z_3) = 40 - 5 \cdot (z_3 - 1).$$

В расходах потребитель ограничен 58 денежными единицами. Решения принимаются в ценовых условиях $\overline{P} = (8, 6, 5)$.

(а) Последовательно сформируйте набор для потребителя, стремящегося получить максимальный эффект от каждой покупки. Определите полезность набора и величину бюджетного остатка.

(б) Каков состав оптимального для данного потребителя набора? Выигрывает ли потребитель, руководствуясь критерием выбора «максимум эффективности покупки»?

(в) В каком случае потребитель действует рационально?

Решения и ответы

В рамках данной задачи предпочтения потребителя описываются функцией полезности, заданной дискретно, поскольку блага неделимы, т. е. количества благ могут быть только целочисленными.

Представленные функции предельной полезности свидетельствуют о том, что наиболее предпочтительным для данного потребителя является благо z_1. Благо z_2 – менее предпочтительно. Замыкает «табель о рангах» благо z_3.

Оптимальный набор агент формирует последовательно (как это происходит и в реальной жизни), каждый раз принимая решение о приобретении конкретной единицы определенного блага. При этом он может руководствоваться различными критериями выбора направления покупки. Для решения удобно использовать таблицу Менгера, описывающую подобные предпочтения (табл. 3.1).

Таблица 3.1

Предельные полезности благ

Единица блага	z_1	z_2	z_3
1-я	72	60	40
2-я	64	54	35
3-я	56	48	30
4-я	48	42	25
5-я	40	36	20
…	…	…	…

(а) Поскольку потребитель стремится получить максимальный эффект от каждой покупки, критерием выбора направления расходования денег для него будет следующий критерий: max MU_i. Рассмотрим полезность наборов, формируемых агентом после каждой покупки. При этом остаток бюджета будем обозначать $\tilde{B}$.

Последовательность шагов агента и результаты принимаемых им решений таковы:

1) $U(1, 0, 0) = 72$; $\tilde{B} = 58 – 8 = 50$;
2) $U(2, 0, 0) = 72 + 64 = 136$; $\tilde{B} = 50 – 8 = 42$;
3) $U(2, 1, 0) = 136 + 60 = 196$; $\tilde{B} = 42 – 6 = 36$;
4) $U(3, 1, 0) = 196 + 56 = 252$; $\tilde{B} = 36 – 8 = 28$;
5) $U(3, 2, 0) = 252 + 54 = 306$; $\tilde{B} = 28 – 6 = 22$;
6) на шестом этапе возникает проблема, что предпочесть: покупку четвертой единицы первого блага или третьей единицы второго блага? Предположим, агент стремится к некоторой сбалансированности набора, поэтому он поступит так, что $U(3, 3, 0) = 306 + 48 = 354$; $\tilde{B} = 22 – 6 = 16$;
7) $U(4, 3, 0) = 354 + 48 = 402$; $\tilde{B} = 16 – 8 = 8$;
8) $U(4, 4, 0) = 402 + 42 = 444$; $\tilde{B} = 8 – 6 = 2$.

Таким образом, агент, следующий правилу «покупать то, что более всего нравится», сформирует набор (4, 4, 0) с полезностью 444 ютила. При этом бюджетный остаток составит 2 ден. ед.

(б) Потребитель, руководствующийся критерием «максимум эффективности покупки», предпринимает обдуманные шаги. Совершая покупку, он будет рассматривать соотношение взвешенных предельных полезностей. В этом случае эффективность расходования ограниченного ресурса – денег – окажется максимальной.

Прежде чем совершать покупки, преобразуем таблицу Менгера: от предельных полезностей благ перейдем к взвешенным предельным полезностям, для каждого из благ произведя расчеты по формуле

$$\widetilde{MU}_i = \frac{MU_i}{p_i}.$$

Разделив предельные полезности соответствующих единиц блага на цену блага, получим матрицу взвешенных предельных полезностей, представленную в табл. 3.2.

Таблица 3.2

Взвешенные предельные полезности благ

Единица блага	z_1	z_2	z_3
1-я	9	10	8
2-я	8	9	7
3-я	7	8	6
4-я	6	7	5
5-я	5	6	4
…	…	…	…

Дополнительный критерий выбора (при равенстве взвешенных предельных полезностей): агент будет стремиться потратить минимум денежных средств. Следовательно, сначала он купит более дешевое благо.

Последовательность шагов агента и результаты принимаемых им решений таковы:

1) $U(0, 1, 0) = 60$; $\tilde{B} = 58 - 6 = 52$;
2) $U(0, 2, 0) = 60 + 54 = 114$; $\tilde{B} = 52 - 6 = 46$;
3) $U(1, 2, 0) = 114 + 72 = 186$; $\tilde{B} = 46 - 8 = 38$;
4) $U(1, 2, 1) = 186 + 40 = 226$; $\tilde{B} = 38 - 5 = 33$;
5) $U(1, 3, 1) = 226 + 48 = 274$; $\tilde{B} = 33 - 6 = 27$;
6) $U(2, 3, 1) = 274 + 64 = 338$; $\tilde{B} = 27 - 8 = 19$;
7) $U(2, 3, 2) = 338 + 35 = 373$; $\tilde{B} = 19 - 5 = 14$;
8) $U(2, 4, 2) = 373 + 42 = 415$; $\tilde{B} = 14 - 6 = 8$;
9) $U(3, 4, 2) = 415 + 56 = 471$; $\tilde{B} = 8 - 8 = 0$.

Таким образом, агент, руководствующийся критерием «максимум эффективности покупки», сформирует набор (3, 4, 2) с полезностью 471 ютил. При этом бюджетный остаток равен нулю.

(в) Во втором случае потребитель действует рационально, стремясь максимально продуктивно использовать имеющуюся у него сумму денег. Признаком рациональности, более эффективного использования бюджета является лучший результат: полезность набора, сформированного оптимизатором, выше: 471 ютил против 444.

Задание 3.2

Предпочтения агента заданы на наборах из трех благ и представимы функций полезности вида $U(z_1, z_2) = z_1 z_2$. Бюджет агента составляет 600 руб. Цены благ – 4 и 2 руб. соответственно. Найдите состав оптимального набора.

Решение и ответ

Поставим задачу потребителя на максимум полезности при ограничении на расходы. Поскольку предпочтения представлены функцией Кобба – Дугласа, они стандартны, т. е. обладают свойствами строгой монотонности и строгой выпуклости. Это предопределяет формулировку задачи как классической оптимизационной:

$$\begin{cases} \max U(z_1, z_2), \\ 600 - 4z_1 - 2z_2 = 0, \\ z_i > 0, \forall i = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

Данную задачу можно решить методом задачи на условный экстремум, поскольку количество уравнений в системе равно количеству неизвестных. Выразим z_2 через $z_1 : z_2 = f(z_1)$. Затем целевую функцию представим в виде функции одной переменной: $U\left(\overline{Z}\right) = z_1 \cdot f\left(z_1\right) = \varphi(z_1)$. Продифференцируем полученную функцию по z_1 и приравняем производную нулю. Решив полученное уравнение, найдем z_1^0. Затем найдем $z_2^0 : z_2^0 = f(z_1^0)$.

Рассмотрев алгоритм в общем виде, последовательно проведем конкретные расчеты:

1) $z_2 = f\left(z_1\right) = 300 - 2z_1 \Rightarrow \tilde{U}\left(\overline{Z}\right) = z_1 \cdot (300 - 2z_1);$

2) $\dfrac{\partial \tilde{U}}{\partial z_1} = 300 - 4z_1^0 = 0 \Rightarrow z_1^0 = 75;$

3) $z_2^0 = f\left(z_1^0\right) = 300 - 2 \cdot 75 = 150.$

Таким образом, состав оптимального набора – (75; 150).

Задание 3.3

Предпочтения агента заданы на наборах из трех благ и представимы функций полезности вида $U(z_1, z_2) = z_1^3 z_2^2$. Бюджет агента составляет 1 500 руб. Цены благ – 2 и 2 руб. соответственно. Найдите состав оптимального набора.

Решение и ответ

Поставим задачу потребителя на максимум полезности при ограничении на расходы. Поскольку предпочтения представлены функцией Кобба – Дугласа, они стандартны, т. е. обладают свойствами строгой монотонности и строгой выпуклости. Это предопределяет формулировку задачи как классической оптимизационной:

$$\begin{cases} \max U(z_1, z_2), \\ 1\,500 - 2z_1 - 2z_2 = 0, \\ z_i > 0, \forall i = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

Задачу можно решить методом задачи на условный экстремум. Однако этот метод для степенной функции полезности, в силу трудоемкости, не совсем удобен. Поэтому применим метод решения задачи, основанный на замене целевой функции условием оптимальности. Этот метод базируется на результатах метода неопределенных множителей Лагранжа. Его применение возможно в силу того, что ограничения на количество благ в наборе $z_i > 0$; это предопределяет и выполнение условия $z_i^0 > 0$. Иначе, оптимум – внутренний. Следовательно, выполняется условие оптимальности:

$$\frac{MU_1^0}{p_1} = \frac{MU_2^0}{p_2} = \lambda^0.$$

Кроме того, строгая выпуклость предпочтений предопределяет единственное решение. Из условия оптимальности получим равенство вида:

$$\left| MRS_{21}^0 \right| = \frac{p_1}{p_2}.$$

Ранее рассматривался алгоритм для определения MRS_{ji}, согласно которому

$$|MRS_{ji}| = \frac{a_i}{a_j} \cdot \frac{z_j}{z_i}.$$

Тогда

$$\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{z_2^0}{z_1^0} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Из этого соотношения получим связь между количествами благ в оптимальном наборе:

$$z_2^0 = \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{p_1}{p_2} \cdot z_1^0 = \frac{2}{3} z_1^0.$$

Получив выражения для z_2^0 через z_1^0, выпишем бюджетное ограничение в виде функции с одной переменной:

$$1\,500 - 2z_1^0 - 2\frac{2}{3} z_1^0 = 0.$$

Решив уравнение, найдем состав оптимального набора:

$$z_1^0 = 450; \ z_2^0 = 300.$$

Таким образом, состав оптимального набора – (450; 300).

Задание 3.4

Потребитель имеет в своем распоряжении некоторую сумму денег. При ценах товаров X и Y 20 и 10 руб. соответственно он формирует набор M, в котором присутствует по 10 единиц каждого блага. Функция полезности данного потребителя имеет вид: $U(x, y) = 100 \cdot \min\{2x; y\}$.

(а) Какую полезность извлечет потребитель, используя набор *M?*

(б) Докажите, что потребитель может увеличить получаемую полезность, изменив состав приобретаемого набора.

Решения и ответы

(а) Рассчитаем полезность набора *M*:

$$U\left(\bar{M}\right) = U\left(10;10\right) = 100 \cdot \min\left\{20;10\right\} = 1\,000.$$

(б) Пусть набор *M* не является оптимальным. Предпочтения потребителя заданы на благах – совершенных комплементариях, следовательно, оба блага будут присутствовать в наборе в положительном количестве. Предпочтения монотонны, значит, бюджетное ограничение формулируется в виде строгого равенства. Поставим и решим задачу на максимум полезности (прямую задачу потребителя):

$$\begin{cases} \max U(x, y), \\ B - 20x - 10y = 0, \\ x > 0,\ y > 0. \end{cases}$$

Определим величину бюджета: $B = 20 \cdot 10 + 10 \cdot 10 = 300$ (руб.). Поскольку комплементарность благ предполагает определенную технологию потребления (для данных предпочтений $y^* = 2x^*$), вместо целевой функции в задаче можно выписать структуру оптимальных наборов.

Теперь система уравнений, которую предстоит решить, имеет вид:

$$\begin{cases} y^* = 2x^*, \\ 300 - 20x - 10y = 0. \end{cases}$$

Из системы получим состав оптимального набора:

$$x^* = \frac{300}{40} = 7{,}5;\ \ y^* = 15.$$

Рассчитаем полезность данного набора:

$$U\left(7{,}5;15\right) = 100 \cdot \min\left\{15;15\right\} = 1\,500.$$

Найденный набор обладает бóльшей полезностью, чем набор *M*. Следовательно, изменив состав набора, можно получить лучший результат. Потребитель может увеличить полезность набора, изменив его состав: откажется от покупки 2,5 единицы товара *X* и дополнительно, на высвободившиеся средства, докупит 5 единиц товара *Y*. Что и требовалось доказать.

Задание 3.5

Предпочтения потребителя определены на потребительском множестве из двух благ, таком, что $x, y \geq 0$. Бюджет агента составляет 100 ден. ед., цены благ – 5 и 2 ден. ед. соответственно. Функция полезности потребителя имеет вид

$$U(x, y) = 9\,000 - \left[(10 - x)^2 + (20 - y)^2\right].$$

Необходимо определить:

(а) тип предпочтений данного агента;

(б) состав оптимального набора.

Решения и ответы

(а) Предпочтения потребителя таковы, что имеется точка насыщения с координатами (10; 20). Предпочтения данного потребителя немонотонны и строго выпуклы. Карта кривых безразличия имеет форму концентрических окружностей с центром в точке насыщения.

(б) Для определения состава оптимального набора необходимо поставить и решить задачу на максимум полезности при ограничении на расходы. Немонотонность предпочтений предопределяет формулировку бюджетного ограничения в форме нестрогого неравенства.

Достижение максимальной полезности данным агентом означает возможность сформировать набор, соответствующий точке насыщения.

В процессе решения следует использовать второе условие дополняющей нежесткости [соотношения (3.12) и (3.13)]:

$$\lambda^0 = \begin{cases} 0, \text{ если } B \geq B^*, \\ > 0, \text{ если } B < B^*. \end{cases}$$

Рассчитаем величину бюджета, обеспечивающего возможность приобретения набора, соответствующего точке насыщения: $B^* = 5 \cdot 10 + 2 \cdot 20 = 90$ (ден. ед.). Поскольку бюджет агента превышает величину B^*, будет сформирован набор, соответствующий точке насыщения (10; 20). У агента останется неиспользованной сумма денег, равная 10 ден. ед.; предельная полезность денег (оптимальная оценка дохода) равна нулю.

Задание 3.6

Предположим, кривые безразличия представляют собой прямые линии с наклоном α: $(\operatorname{tg}\alpha = -b)$. Каким будет оптимальное решение потребителя при бюджете M и ценах p_1, p_2?

Решение и ответ

Решение данного агента зависит от соотношения взвешенных предельных полезностей благ. То есть от того, как соотносятся экономические эффективности благ.

В данном случае предпочтения – вырожденные. Следовательно, возможно угловое решение. Если окажется, что

$$\frac{mu_1}{p_1} > \frac{mu_2}{p_2} \text{ или } \frac{MU_1}{MU_2} = b > \frac{p_1}{p_2},$$

то оптимальный набор будет включать только первое благо.

Если

$$\frac{mu_1}{p_1} < \frac{mu_2}{p_2} \text{ или } \frac{MU_1}{MU_2} = b < \frac{p_1}{p_2},$$

то оптимальный набор будет включать только второе благо.

При равенстве взвешенных предельных полезностей оптимум не единственен. Любой набор, лежащий на бюджетной линии, будет иметь одну и ту же максимально возможную при действующем бюджетном ограничении полезность.

Таким образом, возможны три типа решений: два угловых решения и одно решение с множеством эквивалентных наборов.

Задание 3.7

Предпочтения потребителя X представимы функцией полезности, имеющей вид: $U\left(z_1, z_2\right) = z_1 + 4\sqrt{z_2}$. Потребитель принимает решения при ценах в рублях: $\overline{P}$ = (4, 8) и бюджете 16 руб. Необходимо определить состав оптимального для данного потребителя набора.

Решение и ответ

Предпочтения потребителя – квазилинейны, т. е. линейны по z_1 и нелинейны по z_2. Функция полезности аддитивна. Из сказанного следует, что возможно угловое решение. Предпочтения строго монотонны, поэтому бюджетное ограничение формулируется в виде равенства.

Поставим и решим задачу на максимум полезности:

$$\begin{cases} \max U(z_1, z_2), \\ 16 - 4z_1 - 8z_2 = 0, \\ z_1 \geq 0, z_2 \geq 0. \end{cases}$$

Поскольку $z_1 \geq 0$, $z_2 \geq 0$ и предельная полезность первого блага – константа, возможно угловое решение и отсутствие какого-либо блага в наборе.

Взвешенная предельная полезность первого блага

$$\frac{MU_1}{p_1} = \frac{1}{4} = \text{const};$$

взвешенная предельная полезность второго блага

$$\frac{MU_2}{p_2} = \frac{1}{4\sqrt{z_2}}.$$

Следовательно, соотноситься взвешенные предельные полезности могут по-разному. Это находит отражение в том, как агент будет расходовать деньги.

До тех пор, пока

$$\frac{MU_2}{p_2} \geq \frac{MU_1}{p_1},$$

весь бюджет будет тратиться на благо z_2; если же

$$\frac{MU_2}{p_2} < \frac{MU_1}{p_1},$$

вся неиспользованная часть бюджета будет тратиться на z_1. Найдем z_2^*, такой, что

$$\frac{MU_2}{p_2} = \frac{MU_1}{p_1}.$$

В результате получим:

$$\frac{MU_2(z_2^*)}{p_2} = \frac{MU_1}{p_1} \Rightarrow f\left(z_2^*\right) = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4\sqrt{z_2^*}} = \frac{1}{4} \Rightarrow z_2^* = 1.$$

Для решения задачи целесообразно использовать первое условие дополняющей нежесткости [соотношения (3.10) и (3.11)].

Определим λ^0:

$$\lambda^0 = \max\left\{\frac{MU_1}{p_1};\ \frac{MU_2\left(z_2\right)}{p_2}\right\} = \max\left\{\frac{1}{4};\ \frac{1}{4\sqrt{z_2}}\right\}.$$

Следовательно,

$$\lambda^0 = \begin{cases} \dfrac{1}{4}, \text{ если } z_2 \geq 1, \\ \dfrac{1}{4\sqrt{z_2}}, \text{ если } z_2 \leq 1. \end{cases}$$

Величина бюджета, достаточная для приобретения «критического» количества второго блага, после которого агент будет переключаться на покупку первого блага, составляет $M^* = 8$ руб. Доход агента превышает указанную сумму, следовательно, в оптимальном наборе будут присутствовать оба блага:

$$z_1^0 = \frac{M - p_2 \cdot z_2^*}{p_1} = \frac{16 - 8}{4} = 2;\ z_2^0 = z_2^* = 1.$$

Таким образом, оптимальным будет набор, имеющий состав (2; 1).

Задание 3.8

Предпочтения агента заданы на наборах из трех благ и представимы функций полезности вида:

$$U\left(\overline{Z}\right) = z_1^{1/8} z_2^{1/2} z_3^{1/4}.$$

Бюджет агента составляет 14 000 руб. Цены благ – 2, 4 и 3 руб. соответственно. Найти структуру и состав оптимального набора.

Решение и ответ

Поставим задачу потребителя, чтобы найти состав набора, максимизирующего полезность при заданном бюджете и сложившихся на рынках благ ценах. Поскольку предпочтения представлены функцией Кобба – Дугласа, они стандартны, т. е. обладают свойствами строгой монотонности и строгой выпуклости. Это предопределяет формулировку задачи как классической оптимизационной:

$$\begin{cases} \max U(z_1, z_2, z_3), \\ 14\,000 - 2z_1 - 4z_2 - 3z_3 = 0, \\ z_i > 0,\ \forall i = \overline{1, 3}. \end{cases}$$

Классическая оптимизационная задача может быть решена через условие оптимальности. Строгая выпуклость предпочтений предопределяет единственное решение. Ограничения на количество благ в наборе $z_i > 0$, что предопределяет и выполнение условий: $z_i^0 > 0$. Иначе, оптимум – внутренний. Следовательно, выполняется условие оптимальности:

$$\frac{MU_1^0}{p_1} = \frac{MU_2^0}{p_2} = \frac{MU_3^0}{p_3} = \lambda^0.$$

Из условия оптимальности получим:

$$\left|MRS_{21}^0\right| = \frac{p_1}{p_2} \quad \text{и} \quad \left|MRS_{31}^0\right| = \frac{p_1}{p_3}.$$

Ранее рассматривался алгоритм для определения

$$|MRS_{ji}| = \frac{a_i}{a_j} \cdot \frac{z_j}{z_i}.$$

Тогда

1) $\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{z_2^0}{z_1^0} = \frac{p_1}{p_2}$, следовательно $z_2^0 = \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{p_1}{p_2} \cdot z_1^0 = 2z_1^0$;

2) $\frac{a_1}{a_3} \cdot \frac{z_3^0}{z_1^0} = \frac{p_1}{p_3}$, следовательно $z_3^0 = \frac{a_3}{a_1} \cdot \frac{p_1}{p_3} \cdot z_1^0 = \frac{4}{3} z_1^0$.

Из полученных соотношений определим структуру оптимального набора. Она такова: $z_1^0 : z_2^0 : z_3^0 = 3 : 4 : 6$.

Получив выражения для z_2^0 и z_3^0 через z_1^0, бюджетное ограничение представим в виде уравнения с одной переменной:

$$14\,000 - 2z_1^0 - 4 \cdot 2z_1^0 - 3 \cdot \frac{4}{3} z_1^0 = 0.$$

Решив это уравнение, получим количества благ в оптимальном наборе:

$$z_1^0 = 1\,000;\ z_2^0 = 2\,000;\ z_3^0 = \frac{4\,000}{3} \approx 1\,333{,}3.$$

Таким образом, структура оптимального набора –

$$z_1^0 : z_2^0 : z_3^0 = 3 : 4 : 6;$$

состав оптимального набора – (1 000; 2 000; 1 333,3).

4. ФУНКЦИИ ИНДИВИДУАЛЬНОГО СПРОСА НА БЛАГА

4.1. Спрос на благо как результат оптимального выбора

В данном подразделе речь пойдет о том, каким образом потребитель формирует спрос на блага. Индивидуальный спрос на благо рассматривается как результат оптимального выбора потребителя.

Потребитель предъявляет спрос на рынках отдельных благ, исходя из собственных предпочтений и формализуемых параметров принятия решений о составе оптимального набора, таких как величина дохода (бюджета) и цены благ. Следовательно, спрос на рынке определенного блага будет зависеть от всех перечисленных выше факторов.

Оптимальный набор является векторной функцией дохода (бюджета) и цен благ: $\overline{Z}^0 = \left(z_1^0, z_2^0, \ldots, z_n^0\right) = \overline{F}\left(B, p_1, p_2, \ldots, p_n\right)$. Функции спроса на отдельное благо можно получить на основе анализа модели поведения потребителя исходя из состава оптимального набора. В реальности спрос предъявляется не на набор, а на компоненты оптимального набора, по отдельности. То есть спрос на i-е благо определяется на основе количества этого блага в оптимальном наборе:

$$d_i \equiv z_i^0 = f_i\left(B, p_1, p_2, \ldots, p_n\right). \tag{4.1}$$

Рассмотрим алгоритм получения функций спроса на блага для предпочтений основных типов: предпочтений стандартных; предпочтений, заданных на наборах из благ – совершенных комплементариев; предпочтений, заданных на наборах из благ – совершенных субститутов. Данный алгоритм может быть использован для выведения функций спроса для предпочтений любого иного типа.

Для упрощения будем рассматривать предпочтения, заданные на наборах из двух благ.

Пусть предпочтения потребителя стандартны и описываются функцией полезности Кобба – Дугласа вида $U\left(z_1, z_2\right) = z_1^a z_2^b$, где a, b – положительные константы. Выпишем задачу потребителя:

$$\begin{cases} \max\limits_{z_1,\, z_2} U\left(z_1, z_2\right), \\ B - p_1 \cdot z_1 - p_2 \cdot z_2 = 0, \\ z_i > 0,\ \forall\, i = 1, 2. \end{cases} \tag{4.2}$$

Поскольку предпочтения стандартны, оптимум будет внутренним. Следовательно, выполняется условие оптимальности:

$$\left|MRS_{21}^0\right| = \frac{p_1}{p_2}.$$

Для функции полезности Кобба – Дугласа

$$\left|MRS_{21}\right| = \frac{az_2}{bz_1}.$$

Подставив данное соотношение в условие оптимальности, получим:

$$\frac{az_2^0}{bz_1^0} = \frac{p_1}{p_2} \cdot z_2^0 = \frac{bp_1}{ap_2} \cdot z_1^0.$$

Теперь, подставив полученное выражение для z_2^0 в бюджетное ограничение, получим решение потребителя относительно первого блага:

$$B - p_1 \cdot z_1^0 - p_2 \cdot \frac{bp_1}{ap_2} \cdot z_1^0 = 0.$$

Следовательно,

$$z_1^0 = \frac{a}{\left(a+b\right)} \cdot \frac{B}{p_1}.$$

Количество второго блага в оптимальном наборе:

$$z_2^0 = \frac{b}{\left(a+b\right)} \cdot \frac{B}{p_2}.$$

Функции спроса на блага – несовершенные субституты имеют вид:

$$d_1 = \frac{a}{\left(a+b\right)} \cdot \frac{B}{p_1}; \qquad (4.3)$$

$$d_2 = \frac{b}{\left(a+b\right)} \cdot \frac{B}{p_2}. \qquad (4.4)$$

Обратимся к предпочтениям потребителя, рассматривающего блага как совершенные комплементарии. Такие предпочтения описываются функцией полезности леонтьевского типа, имеющей вид: $U\left(z_1, z_2\right) = \min\left\{az_1; bz_2\right\}$. Задача потребителя в этом случае имеет вид, представленный системой (4.2). Наличие технологии потребления предопределяет структуру оптимальных наборов:

$$z_2^0 = \frac{a}{b} \cdot z_1^0.$$

Подставив данное соотношение в бюджетное ограничение, получим:

$$B - p_1 \cdot z_1^0 - p_2 \cdot \frac{a}{b} \cdot z_1^0 = 0.$$

Ряд преобразований даст следующий результат:

$$z_1^0 = \frac{bB}{(bp_1 + ap_2)} \text{ и } z_2^0 = \frac{aB}{(bp_1 + ap_2)}.$$

Следовательно, функции спроса на блага – совершенные комплементарии имеют вид:

$$d_1 = \frac{bB}{(bp_1 + ap_2)}; \tag{4.5}$$

$$d_2 = \frac{aB}{(bp_1 + ap_2)}. \tag{4.6}$$

Теперь обратимся к предпочтениям потребителя, рассматривающего блага как совершенные субституты. Функция полезности для этих предпочтений такова: $U(z_1, z_2) = az_1 + bz_2$. Задача потребителя в данном случае имеет вид:

$$\begin{cases} \max\limits_{z_1, z_2} U(z_1, z_2), \\ B - p_1 \cdot z_1 - p_2 \cdot z_2 = 0, \\ z_i \ge 0, \forall i = 1, 2. \end{cases} \tag{4.7}$$

Поскольку $z_2 \ge 0$, возможно угловое решение. Воспользуемся первым условием дополняющей нежесткости [соотношения (3.10) и (3.11)] и следующим из него правилом (3.17) для определения λ^0. В нашем случае данное правило приобретает вид:

$$\lambda^0 = \max\left\{\frac{MU_1}{p_1};\ \frac{MU_2}{p_2}\right\} = \max\left\{\frac{a}{p_1}, \frac{b}{p_2}\right\}. \tag{4.8}$$

Нам не известны соотношения предельных полезностей и цен благ, поэтому необходимо рассматривать три случая:

(***a***) $\frac{a}{p_1} > \frac{b}{p_2}$ или $p_1 < \frac{a}{b} \cdot p_2$;

(***b***) $\frac{a}{p_1} < \frac{b}{p_2}$ или $p_1 > \frac{a}{b} \cdot p_2$;

(***c***) $\frac{a}{p_1} = \frac{b}{p_2}$ или $p_1 = \frac{a}{b} \cdot p_2$.

В случае (***a***)

$$\lambda^0 = \frac{a}{p_1} \Rightarrow z_1^0 = \frac{B}{p_1};\ z_2^0 = 0.$$

Функция спроса на первое благо имеет вид:

$$d_1 = \frac{B}{p_1}. \tag{4.9}$$

Спрос на второе благо не предъявляется.

В случае (***b***)

$$\lambda^0 = \frac{b}{p_2} \Rightarrow z_2^0 = \frac{B}{p_2};\ z_1^0 = 0.$$

Функция спроса на второе благо имеет вид:

$$d_2 = \frac{B}{p_2}. \tag{4.10}$$

Спрос на первое благо не предъявляется.

В случае (***c***)

$$\lambda^0 = \frac{a}{p_1} = \frac{b}{p_2} \Rightarrow z_1^0 \geq 0;\ z_2^0 \geq 0;\ z_2^0 = \frac{B - p_1 \cdot z_1^0}{p_2}.$$

Все наборы, составляющие бюджетную линию, имеют для потребителя одинаковую полезность (эквивалентны). То есть угловые решения потребителя и все их линейные комбинации равнопредпочтительны. Тем не менее функцию спроса на первое благо можно описать через формулу (4.9). Спрос на второе благо:

$$d_2 = \frac{B - p_1 \cdot z_1^0}{p_2}\ . \tag{4.11}$$

Какой набор из всего множества эквивалентных наборов в конечном итоге сформирует потребитель, зависит от дополнительных критериев выбора. Резюмируя сказанное выше в отношении предпочтений, заданных на наборах из благ – совершенных субститутов, получим уравнение для функции спроса на первое благо:

$$d_1 = \begin{cases} \dfrac{B}{p_1}, \text{ если } p_1 < \dfrac{a}{b} \cdot p_2, \\ 0, \text{ если } p_1 > \dfrac{a}{b} \cdot p_2, \\ \in \left[0, \dfrac{B}{p_1}\right], \text{ если } p_1 = \dfrac{a}{b} \cdot p_2. \end{cases} \qquad (4.12)$$

Спрос на второе благо, определяемый исходя из спроса на первое благо:

$$d_2 = \begin{cases} 0, \text{ если } p_1 < \dfrac{a}{b} \cdot p_2, \\ \dfrac{B}{p_2}, \text{ если } p_1 > \dfrac{a}{b} \cdot p_2, \\ \dfrac{B - p_1 \cdot z_1^0}{p_2} \in \left[0, \dfrac{B}{p_2}\right], \text{ если } p_1 = \dfrac{a}{b} \cdot p_2. \end{cases} \qquad (4.13)$$

Итак, объем спроса на благо определяется с учетом предпочтений агента, величины дохода и цен благ, включаемых потребителем в набор. До тех пор, пока факторы спроса не изменятся, объем спроса также останется неизменным. Для прогнозирования изменений рыночного спроса необходимо понимать, какова реакция отдельного покупателя на изменение дохода (бюджета) и/или цен благ, включаемых в набор.

Характеристика спроса с позиций его реакции на изменение параметра выбора осуществляется с помощью категории «эластичность».

Под *эластичностью* понимается степень реакции покупателя на изменение параметра выбора. Количественная характеристика эластичности – коэффициент эластичности.

Для функции индивидуального спроса на отдельное благо могут быть рассмотрены: эластичность спроса по доходу (бюджету), эластичность спроса на благо по цене этого блага и эластичности спроса на данное благо по цене других благ. Таким образом, для функции спроса может быть рассчитан (n + 1) коэффициент эластичности.

4.2. Коэффициенты эластичности спроса

4.2.1. Коэффициент эластичности спроса по доходу

Рассматривая влияние дохода на объем спроса, целесообразно оценить реакцию спроса на изменение данного параметра принятия решений. Осуществим оценку с помощью коэффициента эластичности спроса по доходу.

Под э л а с т и ч н о с т ь ю с п р о с а понимается степень реакции спроса на изменение какого-либо формализуемого фактора спроса (качественная характеристика эластичности). В данном случае – на изменение величины дохода.

Количественная характеристика эластичности осуществляется с помощью коэффициента эластичности спроса, показывающего, на сколько процентов изменился объем спроса в ответ на однопроцентное изменение фактора.

Коэффициент эластичности спроса по доходу рассчитывается по формуле

$$E_B^{d_i} = \frac{\partial d_i(\cdot)}{\partial B} \cdot \frac{B}{d_i(\cdot)}. \qquad (4.14)$$

Данный коэффициент может принимать любые значения от $-\infty$ до $+\infty$ и позволяет классифицировать блага на три типа: нормальные, нейтральные и инфериорные. Если значение коэффициента положительно, товар относят к нормальным благам. При нулевом значении данного коэффициента благо считается нейтральным. При отрицательных значениях коэффициента эластичности спроса по доходу благо относят к инфериорным (малоценным).

Рассмотрим классификацию благ подробнее. Более детальная классификация предполагает выделение пяти товарных групп:

товары первой необходимости; товары второй необходимости; предметы роскоши; абсолютно необходимые для жизни товары; инфериорные товары.

Если $0 < E_B^{d_i} < 1$, i-е благо является для потребителя *товаром первой необходимости*. Благо удовлетворяет первичные (как правило, физиологические) потребности. Особенность спроса на блага первой необходимости состоит в том, что первичные потребности насыщаемы, и с ростом дохода спрос вначале увеличивается, а затем перестает реагировать на изменения дохода; благо из нормального становится нейтральным. Это наблюдается при уровне дохода, обеспечивающем полное насыщение потребности в нем. Спрос на товары первой необходимости начинает предъявляться при условии $B > 0$. Потребность практически полностью удовлетворяется объемом z_1^*, что обеспечивается доходом на уровне $B_1 = p_1 \cdot z_1^*$.

Если $E_B^{d_i} \approx 1$, потребитель относит i-е благо к группе *товаров второй необходимости*. Такие товары улучшают структуру потребления. Спрос на них предъявляется при условии насыщения первичных потребностей, т. е. при доходе на уровне не ниже B_1. Особенностью спроса на подобные товары является возможность его полного удовлетворения. Потребность практически полностью удовлетворяется объемом z_2^*, что возможно при уровне дохода $B_2 = p_2 \cdot z_2^*$.

Если $E_B^{d_i} > 1$, i-е благо является для потребителя *предметом роскоши*. Предметы роскоши украшают структуру потребления. Потребитель легко может отказаться от их использования. Спрос на предметы роскоши рациональный потребитель предъявляет при условии достижения доходом уровня, когда полностью насыщены первичные и вторичные потребности, т. е. $B \geq B_2$. Особенности спроса на предметы роскоши состоят в том, что он ненасыщаем и изменяется быстрее, чем доход, т. е.

$$\frac{\partial d_3}{\partial B} > 0; \ \frac{\partial^2 d_3}{\partial B^2} > 0.$$

Потребитель рассматривает товар как *абсолютно необходимый для жизни* в случае, когда при любом уровне дохода реакция спроса на этот товар отсутствует. Иначе, $E_B^{d_i} = 0$. При уровне дохода не ниже $B_4 = p_4 \cdot z_4^*$ спрос на данное благо положителен и предъявляется в необходимом для поддержания жизнеспособности и неизменном объеме z_4^*. При доходе ниже B_4 спрос на благо обнуляется, поскольку потребление меньшего объема блага лишено смысла.

Если $E_B^{d_i} < 0$, i-е благо является для потребителя *инфериорным* (*малоценным*)[30]. Такое отношение к благу обнаруживается при условии, что $B \geq B_5$. При достижении бюджетом уровня B_5 агент меняет свое отношение к благу. Отдельные товары в новых бюджетных условиях потребитель рассматривает как малоценные. Спрос на такие товары по мере дальнейшего увеличения бюджета уменьшается. При уменьшении величины бюджета и приближении последнего к значению B_5 спрос на малоценные товары будет увеличиваться. Подгруппой малоценных товаров являются товары Гиффена[31].

Таким образом, установлена зависимость спроса на благо от величины дохода (бюджета) и рассмотрена динамика спроса на блага из различных товарных групп.

Кроме фактора дохода на объем спроса прямое положительное воздействие оказывает доля расходов на благо, зависящая от системы предпочтений агента. Спрос на благо обратно пропорционален цене. Вследствие этого разумно предположить, что изменения цены блага и/или относительных цен благ, включаемых в набор, окажут воздействие на решения агента.

---

[30] В некоторых учебниках термин «инфериорное благо» («инфериорный товар») трактуется как «низкокачественный товар». Согласиться с такой трактовкой нельзя, поскольку блага обладают всеми необходимыми качественными характеристиками, но при этом имеют невысокую эффективность в потреблении (речь не идет об «осетрине второй свежести»).

[31] Товары Гиффена (гиффеновы товары) – подгруппа инфериорных товаров, отвечающая следующим требованиям: 1) они – основа рациона; 2) спрос на них увеличивается по мере роста цены.

4.2.2. Коэффициент прямой ценовой эластичности

Количественная оценка степени реакции спроса на благо на изменение цены этого блага осуществляется с помощью коэффициента прямой ценовой эластичности. Данный коэффициент для непрерывной функции спроса от цены рассчитывается в точке по формуле

$$E_{p_i}^{d_i} = \frac{\partial d_i(\cdot)}{\partial p_i} \cdot \frac{p_i}{d_i(\cdot)}. \tag{4.15}$$

Значение коэффициента прямой ценовой эластичности интерпретируется следующим образом. Коэффициент показывает, на сколько процентов изменяется объем спроса в ответ на однопроцентное изменение цены данного товара. Знак перед коэффициентом говорит о направлении изменения. Знак «+» свидетельствует об однонаправленном изменении цены и объема спроса; знак «–» обозначает разнонаправленные изменения цены и объема спроса. Как правило, коэффициент прямой ценовой эластичности имеет отрицательные значения: $E_{p_i}^{d_i} < 0$. Однако существуют и исключения. Так, спрос на товары Гиффена и спрос на товары показного потребления имеет положительные коэффициенты прямой ценовой эластичности: объем спроса и цена меняются в одном направлении.

Поскольку в большинстве случаев цена блага и объем спроса на него меняются в разных направлениях, коэффициент прямой ценовой эластичности имеет отрицательные значения. Дабы избежать путаницы в понятиях «увеличивается/уменьшается», значение коэффициента прямой ценовой эластичности обычно рассматривается по модулю $0 \le E_{p_i}^{d_i} \le \infty$.

При отсутствии информации о типе функциональной зависимости спроса от цены применяется метод приблизительного расчета коэффициента эластичности; определяется так называемая *дуговая эластичность* (эластичность в серединной точке):

$$E_{p_i}^{d_i} = \frac{\Delta d_i}{\Delta p_i} \cdot \frac{(p_i^1 + p_i^2)/2}{(d_i^1 + d_i^2)/2}, \tag{4.16}$$

где $\Delta d_i = d_i^2\left(p_i^2\right) - d_i^1\left(p_i^1\right)$; $\Delta p_i = p_i^2 - p_i^1$.

В большинстве случаев коэффициент прямой ценовой эластичности является функцией цены блага. Не исключение и случай линейной функции спроса от цены вида: $D = b - ap$.

В случае линейной зависимости спроса от цены просматривается следующая тенденция: чем выше цена, тем эластичнее спрос. При рыночной цене, равной половине «цены бойкота»[32], ценовая эластичность спроса единична. При более высоких ценах спрос приобретает относительную эластичность; при ценах ниже указанной спрос становится относительно неэластичным по цене. Данную закономерность легко увидеть, рассмотрев формулу для расчета коэффициента прямой ценовой эластичности для линейной функции спроса:

$$E_p^D = \frac{\partial D(\cdot)}{\partial p} \cdot \frac{p}{D(\cdot)} = -a \cdot \frac{p}{(b - ap)} = -\frac{ap}{(b - ap)}. \qquad (4.17)$$

Следует также выделить целый класс функций спроса с постоянными коэффициентами прямой ценовой эластичности, равными $-\alpha$. Такие функции имеют вид:

$$d_i = \frac{k}{p_i^{\alpha}}. \qquad (4.18)$$

Степень реакции покупателей на изменение цены зависит от ряда факторов. К ним относятся:

– широта определения товарной группы или наличие у данного блага близких субститутов;
– принадлежность товара к определенной товарной группе (товары первой необходимости, предметы роскоши и т. д.);
– доля расходов на данный товар в суммарных расходах потребителя;
– фактор времени (продолжительность временно́го интервала, в рамках которого принимается решение о покупке).

[32] Под ценой бойкота понимается минимальная цена, обнуляющая спрос.

4.2.3. Коэффициенты перекрестной ценовой эластичности

Зависимость спроса на *i*-е благо от цены другого (*k*-го) блага предопределяет необходимость анализа реакции функции спроса на цены сопряженных товаров. В этом случае речь идет о перекрестной ценовой эластичности. При общем количестве видов потребительских благ, равном *n*, число цен прочих благ равно $(n-1)$. Следовательно, можно рассчитать $(n-1)$ коэффициент эластичности спроса на *i*-е благо по цене *k*-го блага. Такие коэффициенты называются коэффициентами перекрестной ценовой эластичности и рассчитываются по формуле

$$E_{p_k}^{d_i} = \frac{\partial d_i(\cdot)}{\partial p_k} \cdot \frac{p_k}{d_i(\cdot)}, \ \forall\, k = \overline{1, n};\ k \neq i. \tag{4.19}$$

Интерпретация значений коэффициентов перекрестной ценовой эластичности позволяет охарактеризовать взаимосвязи в потреблении между *i*-м и *k*-м благами[33].

Если анализ реакции спроса на *i*-е благо на изменение цены *k*-го блага показал, что $E_{p_k}^{d_i} > 0$, то можно утверждать, что *i*-е и *k*-е блага являются для потребителя субститутами, т. е. удовлетворяют одну и ту же его потребность. При этом эффективность этих благ в потреблении может быть оценена агентом по-разному (могут различаться соотношения «цена – качество» у данной товарной пары). Конкретное численное значение коэффициента перекрестной ценовой эластичности позволяет установить, насколько близкими субститутами являются блага в рассматриваемой паре.

Если значение $E_{p_k}^{d_i} < 0$, *i*-е и *k*-е блага являются комплементариями, т. е. потребляются совместно, образуя потребительский комплекс. Роль каждого товара может быть различной: *i*-е благо либо образует основу комплекса; либо выполняет вспомогательную функцию (является истинным комплементарием); либо участвует в комплексе «на равных» с другим товаром.

---

[33] Понимание таких взаимосвязей позволяет фирмам-продавцам адекватно реагировать на изменение конъюнктуры рынков сопряженных товаров.

Если значение $E_{p_k}^{d_i} = 0$, i-е и k-е блага – индифференты. То есть эти блага либо никак не связаны в потреблении, либо существование k-го блага игнорируется данным агентом по каким-либо причинам.

Рассмотрев влияние изменений цен на количество благ в оптимальном наборе и соответствующие изменения в объемах спроса на блага, порождаемые общим эффектом от изменения цены какого-либо товара, в следующей главе мы детально проанализируем влияние на указанные изменения эффектов субституции и дохода.

Типовые задания с решениями и ответами

Задание 4.1

Предпочтения потребителя A представимы функцией полезности вида $U\left(\overline{Z}\right) = \min\{3z_1; 5z_2\}$. Агент имеет бюджет M и принимает решения в ценовых условиях $\overline{P} = (p_1, p_2)$.

(а) Выведите для данного потребителя функции спроса вида $z_i^* = f_i(p_i)$.

(б) Схематично представьте полученные функции на графике.

(в) Охарактеризуйте блага, входящие в оптимальный набор, с позиций реакции спроса на изменение цены блага (обычное благо/гиффенов товар), цены сопряженного товара (субституты/комплементарии/индифференты), дохода (нормальное/нейтральное/инфериорное благо).

Решения и ответы

(а) Исходя из вида функции полезности $U\left(\overline{Z}\right) = \min\{3z_1; 5z_2\}$ блага являются комплементариями. Постановка задачи для такого типа предпочтений и алгоритм ее решения были рассмотрены в подразделе 4.1. В оптимальные наборы блага, в соответствии с технологией потребления, включаются в следующих взаимосвязанных количествах:

$$z_2^* = \frac{3}{5} z_1^*;\;\; z_1^* = \frac{5}{3} z_2^*.$$

Поочередно подставляя в бюджетное ограничение данные соотношения, получаем:

$$M - p_1 \cdot \frac{5}{3} \cdot z_2^* - p_2 \cdot z_2^* = 0 \Rightarrow z_2^* = \frac{3M}{5p_1 + 3p_2};$$

$$M - p_1 \cdot z_1^* - p_2 \cdot \frac{3}{5} \cdot z_1^* = 0 \Rightarrow z_1^* = \frac{5M}{5p_1 + 3p_2}.$$

Таким образом, $z_1^* = \dfrac{5M}{5p_1 + 3p_2}$; $z_2^* = \dfrac{3M}{5p_1 + 3p_2}$.

(б) На рис. 4.1 схематично представлен спрос на i-е благо в зависимости от цены этого блага. Графики функций спроса на первое и второе блага выглядят одинаково. Следует отметить, что аналогичную форму будут иметь и графики функций $d_1(p_2)$, $d_2(p_1)$.

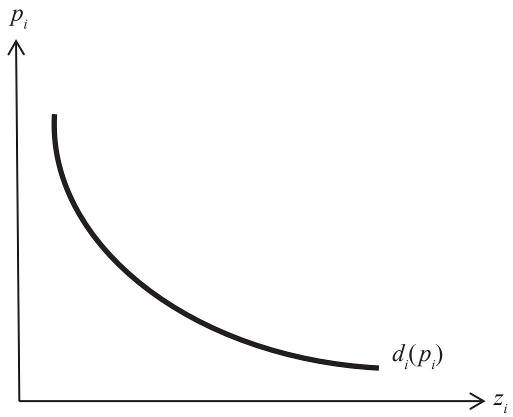

Рис. 4.1. Функция спроса на благо – совершенный комплементарий

(в) Анализ полученных функций спроса показывает: объем спроса как на первое благо, так и на второе положительно связан с величиной дохода (бюджета), изменения однонаправленны. Следовательно, оба блага – нормальные товары. С ростом цены блага спрос на него уменьшается. Значит, блага являются обычными благами (т. е. они – не товары Гиффена и не товары показного потребления). С ростом цены сопряженного товара спрос на данное благо уменьшается, т. е. $E_{p_j}^{d_i} > 0$. Соответственно тип связи между благами – комплементарность (дополняемость).

Таким образом, оба блага – обычные (не гиффеновы) товары; принадлежат к группе нормальных; являются совершенными комплементариями.

Задание 4.2

Предпочтения потребителя *K* стандартны и могут быть представлены функцией полезности вида $U\left(\overline{Z}\right) = z_1^2 z_2^3 z_3^3$. Агент имеет бюджет *B* ден. ед. и принимает решения в ценовых условиях $\overline{P} = \left(p_1, p_2, p_3\right)$.

(а) Определите вид функций спроса (от цены/цен; от дохода) на каждое благо.

(б) Рассчитайте все возможные коэффициенты эластичности спроса.

Решения и ответы

(а) Функции спроса могут быть найдены из задачи на максимум полезности при ограничении на расходы. В данном случае формулируется классическая оптимизационная задача, поскольку предпочтения стандартны[34]. Решение будет внутренним и единственным. Для решения целесообразно использовать метод замены целевой функции условием оптимальности.

Задача потребителя будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \max U(z_1, z_2, z_3), \\ B - p_1 z_1 - p_2 z_2 - p_3 z_3 = 0, \\ z_i > 0, \ \forall i = \overline{1, 3}. \end{cases}$$

[34] Методы решения классической оптимизационной задачи для случая стандартных предпочтений были подробно рассмотрены в главе 3; в ней же приведен анализ различных способов решения подобных задач.

Из условия оптимальности (3.16) для данной задачи получим следующие соотношения количеств благ в оптимальном наборе:

$$z_2^0 = \frac{3p_1}{2p_2} \cdot z_1^0; \; z_3^0 = \frac{3p_1}{2p_3} \cdot z_1^0.$$

Подставим полученные соотношения в бюджетное ограничение и выразим из него спрос на первое благо, z_1^0:

$$B - p_1 z_1^0 - p_2 \left(\frac{3p_1}{2p_2} \cdot z_1^0 \right) - p_3 \left(\frac{3p_1}{2p_3} \cdot \leq z_1^0 \right) = 0.$$

Следовательно, спрос на первое благо определяется как

$$d_1 \equiv z_1^0 = \frac{1}{4} \cdot \frac{B}{p_1}.$$

Теперь определим вид функций спроса на второе и третье блага:

$$d_2 \equiv z_2^0 = \frac{3p_1}{2p_2} \cdot z_1^0 = \frac{3p_1}{2p_2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{B}{p_1} = \frac{3}{8} \cdot \frac{B}{p_2};$$

$$d_3 \equiv z_3^0 = \frac{3p_1}{2p_3} \cdot z_1^0 = \frac{3p_1}{2p_3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{B}{p_1} = \frac{3}{8} \cdot \frac{B}{p_3}.$$

Таким образом,

$$d_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{B}{p_1}; \; d_2 = \frac{3}{8} \cdot \frac{B}{p_2}; \; d_3 = \frac{3}{8} \cdot \frac{B}{p_3}.$$

(б) Для каждой из найденных функций спроса можно рассчитать по два коэффициента эластичности – коэффициент эластичности спроса по цене данного блага и коэффициент эластичности спроса по доходу. Виды функций спроса на все блага идентичны, поэтому ограничимся расчетами для функции спроса на одно из благ, например первое. Рассчитаем коэффициенты эластичности спроса на первое благо:

$$E_{p_1}^{d_1} = \frac{\partial d_1(\cdot)}{\partial p_1} \cdot \frac{p_1}{d_1} = \left[(-1) \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{B}{p_1^2} \right] \cdot \frac{p_1}{\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{B}{p_1} \right)} = -1;$$

$$E_{B}^{d_1} = \frac{\partial d_1(\cdot)}{\partial B} \cdot \frac{B}{d_1} = \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{p_1} \right] \cdot \frac{B}{\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{B}{p_1} \right)} = 1.$$

Интерпретация значений коэффициентов эластичности показывает, что спрос на первое благо по цене имеет постоянную эластичность, равную −1, что означает: при увеличении/снижении цены на 1 % объем спроса уменьшится/возрастет на 1 %. Эластичность спроса по доходу также постоянна и равна 1, что обусловлено линейной зависимостью спроса от дохода.

По второму и третьему благу получим аналогичные результаты и выводы.

Задание 4.3

Рассмотрите предпочтения агента, представимые функцией полезности вида $U(x, y) = 10x + 4y$. Бюджет агента составляет 200 ден. ед., цена блага y – 4 ден. ед. Необходимо вывести функцию спроса от цены для блага x.

Решение и ответ

Предпочтения данного агента заданы на наборах из благ – совершенных субститутов. Предельные полезности благ – константы. Такие предпочтения называют вырожденными, поскольку не выполняется закон убывающей предельной полезности. Предпочтения строго монотонны, что обусловливает формулировку бюджетного ограничения в виде строгого равенства. Предпочтения выпуклы, но не строго выпуклы, следовательно, $x, y \geq 0$. Для такого типа предпочтений возможно формирование углового оптимума.

Запишем задачу на максимум полезности при ограничении на расходы:

$$\begin{cases} \max U(x,\ y), \\ B - p_x x - 4y = 0, \\ x,\ y \geq 0. \end{cases}$$

Задачу такого типа следует решать с помощью первого условия дополняющей нежесткости [соотношения (3.10) и (3.11)] и условия (3.17), которое для данной задачи имеет вид:

$$\lambda^0 = \max\left\{\frac{MU_x}{p_x}, \frac{MU_y}{p_y}\right\} = \max\left\{\frac{10}{p_x}, \frac{4}{4}\right\} = \max\left\{\frac{10}{p_x}, 1\right\}.$$

Возможны три сценария развития событий, в зависимости от уровня цены блага x:

(1) $\lambda^0 = 1 \Rightarrow d_x = 0;$

(2) $\lambda^0 = \dfrac{10}{p_x} \Rightarrow d_x = \dfrac{B}{p_x};$

(3) $\lambda^0 = \dfrac{10}{p_x} = 1 \Rightarrow 0 \leq d_x \leq \dfrac{B}{p_x}.$

Сценарий (1) реализуется, если $p_x > 10$. Если $p_x < 10$, актуален сценарий (2). И, наконец, сценарий (3) – при условии, что $p_x = 10$. Теперь можно выписать функцию спроса на благо x от цены:

$$d_x\left(p_x\right) = \begin{cases} \dfrac{B}{p_x}, \text{ если } 0 < p_x < 10, \\ \in \left[0;\ 10\right], \text{ если } p_x = 10, \\ 0, \text{ если } p_x > 10. \end{cases}$$

Графическая иллюстрация ответа представлена на рис. 4.2.

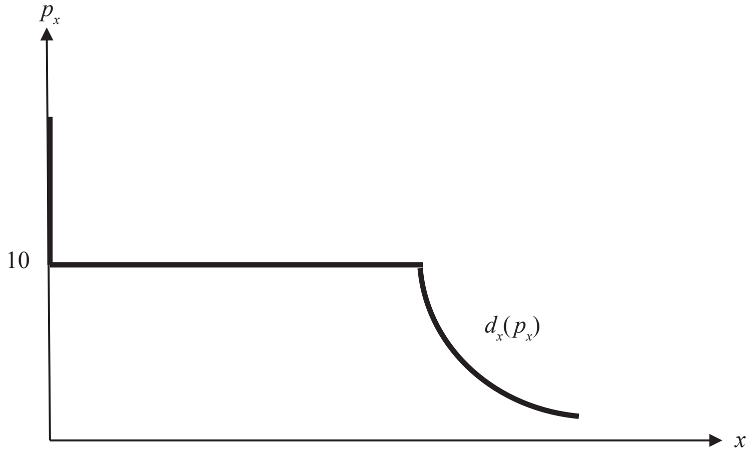

Рис. 4.2. Спрос на благо x – совершенный субститут

Задание 4.4

Рассмотрите линейную функцию индивидуального спроса от цены вида $D = b - a \cdot p$.

(а) Определите уровень «цены бойкота» (минимальной цены, при которой спрос на благо уже не предъявляется) и потребное количество данного блага для агента.

(б) Докажите, что модуль коэффициента прямой ценовой эластичности спроса (коэффициента эластичности спроса на благо по цене данного блага) является возрастающей функцией цены.

(в) Докажите, что значение коэффициента прямой ценовой эластичности, равное -1, обеспечивается при цене, составляющей половину «цены бойкота».

Решения и ответы

(а) Для определения уровня «цены бойкота» – p^*: $D(p^*) = 0$ – решим уравнение $b - a \cdot p^* = 0$. Простые расчеты показывают, что

$$p^* = \frac{b}{a}.$$

Потребное количество блага (N^*) определяет объем спроса при нулевой цене: $N^* \equiv D^{max} = D(0) = b$.

Таким образом,

$$p^* = \frac{b}{a};\; N^* = b.$$

(б) Для доказательства рассмотрим формулу, по которой производится расчет коэффициента прямой ценовой эластичности спроса:

$$\left|E_p^D\right| = \left|\frac{\partial D(\cdot)}{\partial p}\right| \cdot \frac{p}{D\left(p\right)} = \left|-a\right| \cdot \frac{p}{\left(b - ap\right)} = \frac{ap}{b - ap} = f(p). \qquad \text{(A)}$$

Из формулы (A) видно, что коэффициент не является константой и зависит от цены блага. Чтобы обойтись без дополнительных расчетов, проведем качественный анализ. Рассматриваемая функция спроса отражает закон спроса: с ростом цены объем спроса уменьшается. Значит, при увеличении цены числитель в формуле (A) будет увеличиваться, а знаменатель уменьшаться.

Следовательно, с ростом цены значение функции $f(p)$ будет увеличиваться. Тогда можем записать: $\dfrac{\partial f(p)}{\partial p} > 0$, что и требовалось доказать.

(в) Для доказательства воспользуемся формулой (A) из предущего пункта задачи. Нас интересует цена, обеспечивающая выполнение условия $\left|E_p^D(\hat{p})\right| = 1$.

Распишем уравнение для сформулированного условия:

$$a \cdot \frac{\hat{p}}{(b - a\hat{p})} = 1.$$

Преобразовав данное уравнение, получим:

$$a\hat{p} = b - a\hat{p} \Rightarrow \hat{p} = \frac{b}{2a} = \frac{1}{2}p^*,$$

что и требовалось доказать.

Задание 4.5

Спрос потребителя *X* на первое благо зависит от цены этого блага, цен второго и третьего блага, величины бюджета и имеет вид:

$$D_1 = 800 - 20 p_1 + 10 p_2 + \frac{1\,000}{p_3} + 0{,}01\, B.$$

Бюджет потребителя составляет 10 000 руб. На рынках благ действуют цены: $\overline{P} = (50; 100; 10)$.

Необходимо определить величины всех коэффициентов эластичности спроса на первый товар и – на основе их интерпретации – дать полную характеристику первого товара, т. е. установить, является ли первое благо: (1) обычным или гиффеновым товаром; (2) нормальным/нейтральным/инфериорным товаром; (3) субститутом/комплементарием/индифферентом по отношению ко второму и третьему благу. Также требуется оценить степень удовлетворенности спроса на первый товар при действующей на рынке цене этого товара и прочих равных условиях.

Решения и ответы

Функция спроса на первое благо, предъявляемого потребителем *X*, является функцией четырех аргументов: $D_1 = F(B, p_1, p_2, p_3)$. Следовательно, можно рассчитать четыре коэффициента эластичности спроса: коэффициент прямой ценовой эластичности [по формуле (4.15)]; два коэффициента перекрестной ценовой эластичности [по формуле (4.19)] и коэффициент эластичности спроса по доходу [по формуле (4.14)].

Поскольку коэффициенты эластичности рассчитываются «в точке», необходимо определить значение функции спроса:

$$D_1 = F(10\,000;\ 50;\ 100;\ 10) =$$
$$= 800 - 20 \cdot 50 + 10 \cdot 100 + 0{,}01 \cdot 10\,000 = 1\,000.$$

Координаты точки известны. Теперь можно произвести расчеты всех четырех коэффициентов эластичности:

1) $$E_{p_1}^{D_1} = \frac{\partial D_1(\cdot)}{\partial p_1} \cdot \frac{p_1}{D_1(\cdot)} = -20 \cdot \frac{50}{1\,000} = -1;$$

2) $$E_{p_2}^{D_1} = \frac{\partial D_1(\cdot)}{\partial p_2} \cdot \frac{p_2}{D_1(\cdot)} = +10 \cdot \frac{100}{1\,000} = +1;$$

3) $$E_{p_3}^{D_1} = \frac{\partial D_1(\cdot)}{\partial p_3} \cdot \frac{p_3}{D_1(\cdot)} = \left(-1 \cdot \frac{1\,000}{100^2}\right) \cdot \frac{100}{1\,000} = -0{,}01;$$

4) $$E_{B}^{D_1} = \frac{\partial D_1(\cdot)}{\partial B} \cdot \frac{B}{D_1(\cdot)} = 0{,}01 \cdot \frac{10\,000}{1000} = 0{,}1.$$

Ниже представлена интерпретация полученных значений коэффициентов эластичности.

1) Поскольку $E_{p_1}^{D_1} < 0$, первый товар – обычное благо (не гиффеново). Спрос на первое благо зависит от цены линейно, коэффициент прямой ценовой эластичности равен -1; это означает, что на рынке установилась цена, равная ½ «цены бойкота». Следовательно, при цене первого блага 50 руб. спрос удовлетворен на 50 %. Проверим, так ли это.

Преобразуем исходную функцию спроса $D_1 = F(B, p_1, p_2, p_3)$ в функцию вида $\widetilde{D_1} = \varphi(p_1)$. Поскольку вид функции определяется при прочих равных условиях, получим функцию вида

$$\widetilde{D_1} = \varphi(p_1) = 800 - 20p_1 + 10 \cdot 100 + \frac{1000}{10} + 0{,}01 \cdot 10000 = 2000 - 20p_1.$$

«Цена бойкота» для функции $\widetilde{D_1}$ составляет:

$$p_1^* = \frac{2\,000}{20} = 100.$$

Соответственно цена 50 руб. – половина «цены бойкота». Объем спроса при цене 50 руб. составит $\frac{1}{2}\bar{D}_1^{\max}$.

Следовательно, агент захочет приобрести 50 % от потребного количества.

2) Значение коэффициента ценовой эластичности спроса на первое благо по цене второго положительно. Это означает, что первое и второе блага – субституты. Поскольку $E_{p_2}^{D_1} = 1$, первое и второе блага, по мнению потребителя, имеют одинаковую экономическую эффективность (соотношения «цена – качество» одинаковы).

3) Значение коэффициента ценовой эластичности спроса на первое благо по цене третьего блага отрицательно. Это означает, что первое и третье блага – комплементарии. Поскольку $|E_{p_3}^{D_1}| < 1$, первое благо – основа комплекса, второе благо – истинный комплементарий (аксессуар).

4) Судя по значению коэффициента эластичности спроса на первое благо по доходу, благо является нормальным. Незначительная реакция спроса на изменение дохода может свидетельствовать либо о принадлежности первого блага к группе товаров первой необходимости, либо о том, что спрос близок к насыщению. Однако анализ коэффициента прямой ценовой эластичности и оценка степени удовлетворенности спроса на первое благо опровергают последнюю версию. Значит, первое благо, вероятнее всего, принадлежит к группе товаров первой необходимости.

5. ПОВЕДЕНИЕ ПОТРЕБИТЕЛЯ В УСЛОВИЯХ ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ ДОХОДА И ЦЕН

Предпочтения потребителя могут изменяться во времени. Однако они стабильны в рамках краткосрочных временны́х интервалов, тогда как бюджетное ограничение может меняться вследствие изменения факторных доходов, системы налогообложения, системы социального обеспечения или вследствие изменения конъюнктуры на рынках потребительских благ. Изменения в бюджетном ограничении потребителя можно разделить на два типа: на изменения величины дохода (бюджета) и на изменения в ценах.

Изменения в ценах подразделяются на такие, при которых относительные цены остаются прежними, и изменения, порождающие относительное подорожание (удешевление) одного из благ. Пропорциональное изменение цен всех благ аналогично по своим последствиям изменению дохода. Иначе говоря, пропорциональное изменение цен порождает изменение реального дохода при сохранении неизменной структуры системы цен. Изменения в структуре системы цен (в относительных ценах) могут порождаться флуктуациями в цене одного блага или всех потребительских благ, когда цены благ меняются в разных направлениях или происходит непропорциональное изменение цен нескольких (всех) благ.

Последовательно рассмотрим изменения в бюджетном ограничении и порождаемые ими эффекты, обусловливающие изменения состава оптимального набора и величины спроса на благо (блага).

5.1. Влияние на оптимум потребителя и объем спроса изменений в реальном доходе и эффект дохода

Изменение величины дохода (бюджета) при постоянных ценах ослабляет или ужесточает бюджетное ограничение. Ранее данное обстоятельство иллюстрировалось посредством параллельных сдвигов бюджетной линии. Аналогичная картина (при сохранении относительных цен) прослеживается и при одновременном, однонаправленном и пропорциональном изменении цен всех благ, т. е. при изменении уровня цен. В этом случае меняется состав оптимального набора при сохранении его структуры (соотношений количеств благ в оптимальном наборе)[35]. Происходят изменения и в объеме спроса. Все эти изменения порождены действием эффекта дохода.

Эффект дохода (*income effect – IE*) – изменение состава оптимального набора, обусловленное изменением уровня реального дохода.

Реальный доход изменяется, если:

- изменяется номинальный (денежный) доход при неизменных ценах;
- пропорционально изменяются цены всех благ.

Реальный доход увеличивается при увеличении номинального дохода или при пропорциональном снижении цен всех благ; реальный доход уменьшается при уменьшении номинального дохода или при пропорциональном увеличении цен всех благ. Увеличение реального дохода обусловливает расширение возможностей выбора; снижение реального дохода приводит к сужению возможностей выбора. Величина эффекта дохода определяется по каждому благу, включаемому в набор.

---

[35] При изменении цены одного из благ или при непропорциональном изменении цен благ бюджетная линия имеет непараллельный сдвиг; наряду с эффектом дохода реализуется также эффект субституции; изменяется не только состав оптимального набора, но и его структура. Такого рода случаи будут рассмотрены в подразделе 5.2.

По типу реакции спроса на благо на изменение номинального дохода все блага подразделяются на три группы: нормальные, нейтральные и инфериорные (малоценные) блага.

Для нормальных благ характерно следующее: объем спроса на благо (вслед за оптимальным количеством блага в наборе) и величина бюджета меняются однонаправленно. То есть

$$\frac{\partial z_i^0}{\partial B} = \frac{\partial d_i}{\partial B} > 0.$$

Следовательно, величина эффекта дохода для нормальных благ положительна при увеличении номинального дохода и отрицательна при его снижении.

Для нейтральных благ справедлива следующая закономерность:

$$\frac{\partial z_i^0}{\partial B} = \frac{\partial d_i}{\partial B} = 0.$$

Эффект дохода для нейтральных благ имеет нулевую величину, независимо от того, произошло увеличение или снижение номинального дохода при любом его уровне.

Объем потребления инфериорных благ (малоценных товаров), спрос на такие блага и величина бюджета меняются в разных направлениях. Для инфериорных благ справедлива закономерность

$$\frac{\partial z_i^0}{\partial B} = \frac{\partial d_i}{\partial B} < 0.$$

Инфериорные блага – специфическая группа. В нее включаются такие блага, эффективность в потреблении которых низка. Однако низкая оценка эффективности благ в потреблении обнаруживается только при переходе агента в более высокую бюджетную группу, когда потребность может удовлетворяться другими благами, с большей эффективностью и, соответственно, с более высокой ценой. Эффект дохода для инфериорных благ будет иметь положительную величину, если номинальный доход уменьшается, и отрицательную, если номинальный доход увеличивается.

Таким образом, величина эффекта дохода зависит от направления изменения дохода и от типа самого блага.

На рис. 5.1 представлены изменения в составе оптимального набора, обусловленные действием эффекта дохода. Исходный оптимум потребителя – набор E_1; оптимум после изменения реального дохода – E_2. Изменения в объемах спроса на блага определяются величинами эффектов дохода (IE_i), показаны на рисунке стрелками и могут быть рассчитаны по формуле

$$\Delta d_i \equiv \Delta z_i^0 = z_i^2 - z_i^1, \; \forall\, i = 1, 2. \tag{5.1}$$

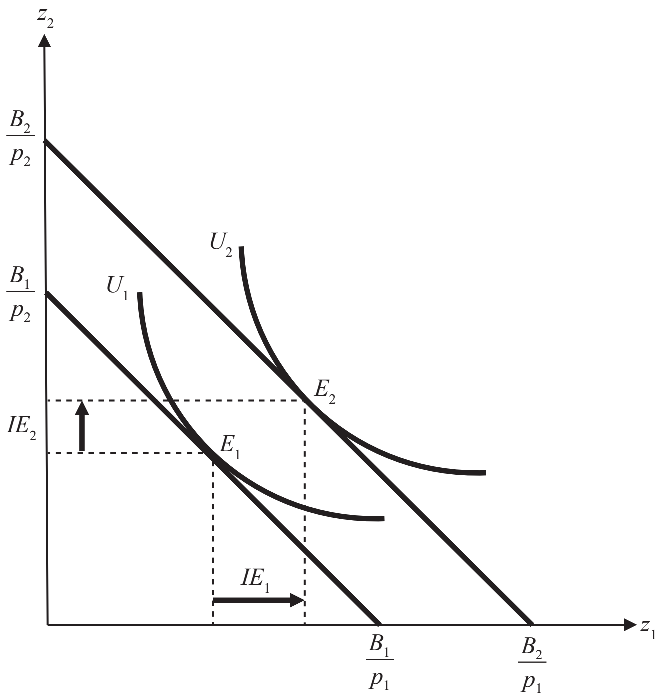

Рис. 5.1. Влияние на оптимум потребителя изменений в реальном доходе вследствие увеличения номинального дохода (реализация эффекта дохода)

Рассматривая все возможные оптимальные решения агента при различных уровнях реального дохода, можно получить линию «доход – потребление».

Линия «доход – потребление» – совокупность оптимальных наборов, формируемых агентом при неизменных относительных ценах и изменяющемся (вследствие изменения номинального дохода или уровня цен) бюджете. Для случая стандартных предпочтений линия «доход – потребление» представлена на рис. 5.2.

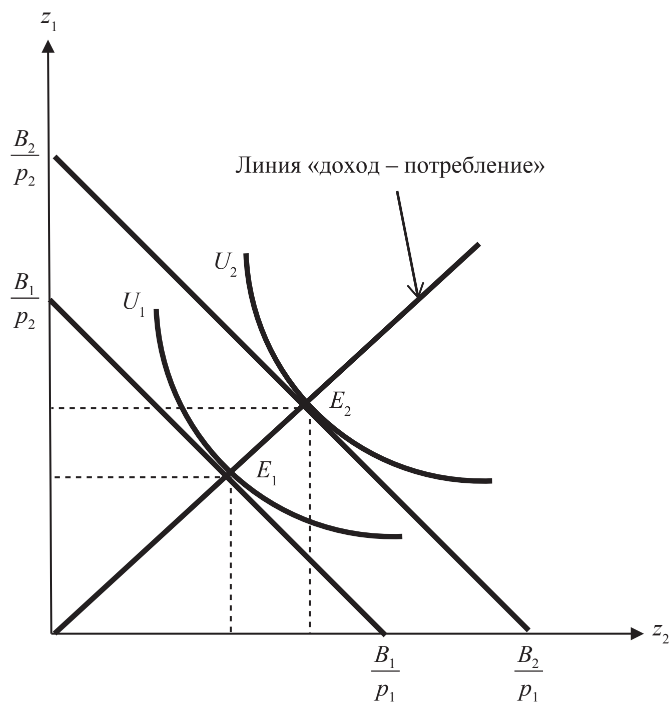

Рис. 5.2. Динамика равновесия потребителя
при изменении реального дохода и линия
«доход – потребление» для стандартных предпочтений

Конфигурация линии «доход – потребление» может быть различной, т. е. отражать либо линейный, либо нелинейный тип взаимосвязи между количествами благ в оптимальных наборах, и зависит от типа предпочтений агента и, соответственно, описывающей их функции полезности; от соотношения эффективностей благ в потреблении; от характера благ, включаемых в набор (нормальные, нейтральные или инфериорные).

Анализ оптимальных решений агента, принятых при различных уровнях дохода, позволяет получить *функции Энгеля*[36], устанавливающие зависимость количества блага в оптимальном наборе от величины номинального дохода (величины бюджета). Для стандартных предпочтений (при $n = 2$) из задачи на максимум полезности [функция полезности вида $U\left(z_1,\, z_2\right) = z_1^a z_2^b$] можно получить две функции Энгеля вида:

$$z_1^0 = f_1\left(B\right) = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{B}{p_1} = k_1 B;\;\; z_2^0 = f_2\left(B\right) = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{B}{p_2} = k_2 B. \quad (5.2)$$

В функциях (5.2) параметры k_1 и k_2 – константы, поскольку цены благ и показатели степеней в функции полезности неизменны. Следовательно, функции Энгеля линейны по доходу.

Вид параметров функций Энгеля k_1 и k_2 также демонстрирует зависимость оптимальных решений потребителя от соотношения, известного в быту как соотношение «цена – качество». Константа в функции Энгеля для первого блага $\left(k_1 = \dfrac{a}{a+b} \cdot \dfrac{1}{p_1}\right)$ определяется соотношением относительной эффективности первого блага в потреблении и его цены, т. е. отражает экономическую эффективность использования первого блага. Аналогично k_2 – показатель экономической эффективности второго блага.

С помощью функций Энгеля можно также рассчитать доли расходов на конкретное благо (ν_i) в суммарных расходах домашнего хозяйства, составляющих сумму, равную величине бюджета.

[36] Функции Энгеля показывают зависимость объема блага в оптимальном наборе от величины бюджета агента. Следует различать функции Энгеля и функции Торнквиста, которые показывают зависимость спроса (объема планируемых покупок) от величины бюджета.

Доли расходов на блага можно определить по формулам

$$\nu_1 = \frac{p_1 \cdot z_1^0}{B} = \frac{p_1 \cdot \dfrac{a}{a+b} \cdot \dfrac{B}{p_1}}{B} = \frac{a}{a+b}\ ; \tag{5.3}$$

$$\nu_2 = \frac{p_2 \cdot z_2^0}{B} = \frac{p_2 \cdot \dfrac{b}{a+b} \cdot \dfrac{B}{p_2}}{B} = \frac{b}{a+b}. \tag{5.4}$$

Формулы (5.3) и (5.4) характеризуют долю расходов на блага при формировании оптимального набора. Если $a + b = 1$, показатели степени в функции полезности позволяют определить, какую долю в суммарных расходах домашнего хозяйства занимают расходы на данное благо.

Приведенные рассуждения применимы и в случае, когда предпочтения заданы на наборах из трех и более благ. Для стандартных предпочтений, описываемых функцией Кобба – Дугласа, справедливо утверждение: показатель степени демонстрирует долю расходов на данное благо, если сумма показателей степени равна единице. Осуществляя монотонные преобразования функции Кобба – Дугласа с любой суммой степеней, можно получить такой ее вид, который позволит определить структуру расходов без дополнительных расчетов.

5.2. Влияние на оптимум потребителя и объем спроса изменений в относительных ценах

В случае, когда происходит изменение цены одного из благ или цены всех благ меняются, но в разной пропорции, наблюдается относительное подорожание/удешевление одного товара и относительное удешевление/подорожание другого (других при $n > 2$). При этом номинальный доход агента сохраняется на прежнем уровне.

Изменение относительных цен обусловливает изменение угла наклона бюджетной линии. Если блага в наборе являются субститутами, изменения в составе оптимального набора объясняются действием двух эффектов – эффекта субституции (эффекта замещения) и эффекта дохода (по ценам).

Эффект субституции (замещения) (*substitution effect – SE*) – изменение состава оптимального набора при неизменном реальном доходе такое, что относительно подорожавшее благо вытесняется из набора (заменяется) относительно подешевевшими.

Происходит не только изменение состава оптимального набора, меняется и его структура. Изменение структуры оптимального набора объясняется реализацией эффекта субституции; состав набора меняется благодаря реализации эффекта дохода. Изменения в наборе, включающем только комплементарные блага, обусловлены реализацией только эффекта дохода.

При изменении цены любого блага, включаемого в набор, меняется реальный доход потребителя. Повышение цены товара уменьшает реальный доход; снижение цены приводит к увеличению реального дохода. В результате возникает *эффект дохода*, воздействие которого на количество блага в оптимальном наборе и изменение спроса на благо было рассмотрено в подразделе 5.1.

Таким образом, в совокупном изменении состава набора и общем эффекте для спроса на блага необходимо выделить два компонента – величину эффекта субституции и величину эффекта дохода.

Рассмотрим общий эффект (*total effect – TE*) от изменения цены отдельного блага для оптимального набора и объема спроса на благо. Предположим, предпочтения потребителя стандартны и варьирует цена первого блага. Вследствие увеличения цены первого блага в равновесном наборе возникают изменения (рис. 5.3): угол наклона бюджетной линии изменяется; бюджетная линия поворачивается по часовой стрелке вокруг точки на оси ординат (максимально доступное количество второго блага остается без изменения); точка на оси абсцисс смещается влево, что означает уменьшение максимально доступного количества первого блага. Исходный оптимум агента – набор E_1; новый оптимум – набор E_2.

Стрелкой (направленной влево) показан общий эффект от изменения цены первого блага для спроса на него – Δz_1. Общий эффект от изменения цены первого блага является результатом одновременной реализации эффекта субституции и эффекта дохода.

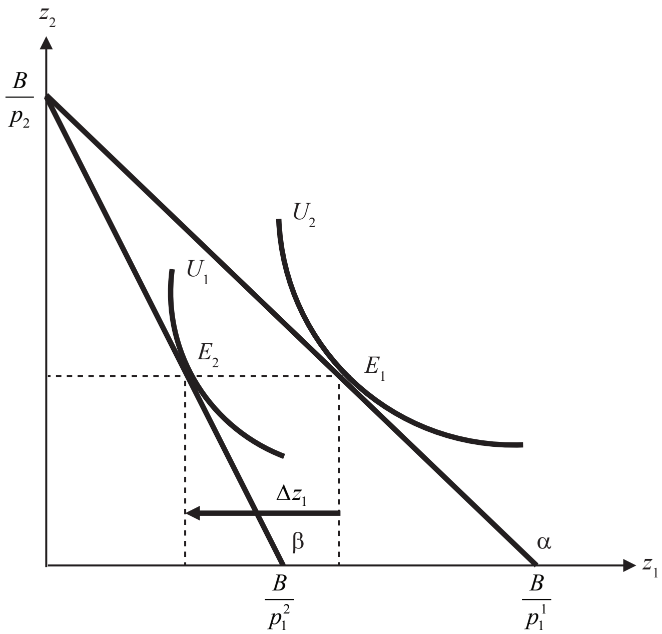

Рис. 5.3. Влияние увеличения цены первого блага на состав оптимального набора и общий эффект от изменения цены для спроса на первое благо

Последовательное изменение цены первого товара позволяет рассмотреть все возможные равновесные решения потребителя при разных уровнях цены первого товара и неизменных бюджете и цене второго товара. Совокупность оптимальных решений, принимаемых потребителем при разных уровнях цены первого товара, называется линией «цена – потребление».

Линия «цена – потребление» для стандартных предпочтений показана на рис. 5.4.

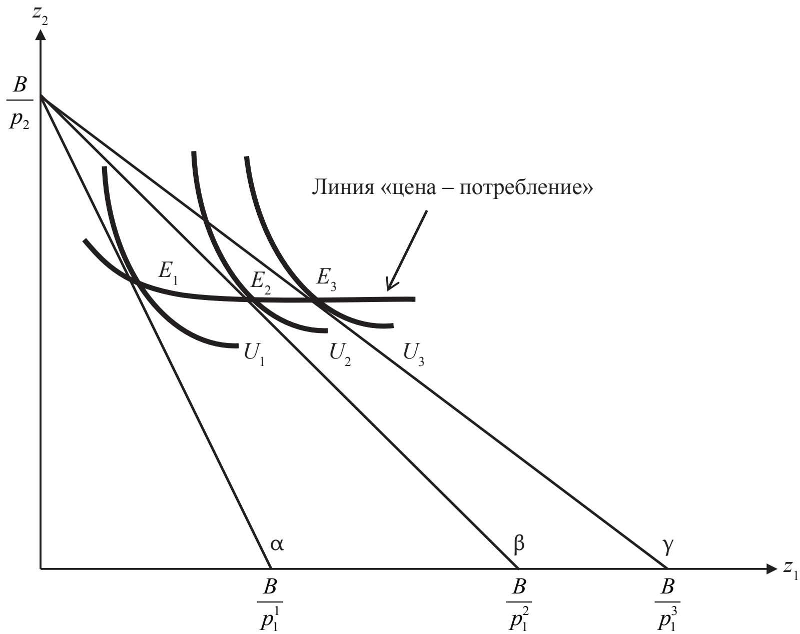

Рис. 5.4. Динамика равновесия потребителя при изменении цены первого блага и линия «цена – потребление»

На основе анализа оптимальных решений агента при различных уровнях цены первого блага (для любого типа предпочтений) можно получить функции спроса на первое и второе блага вида:

$$d_1 = f_1(p_1); \; d_2 = f_2(p_1). \tag{5.5}$$

5.3. Декомпозиция общего эффекта от изменения цены блага (выделение эффекта субституции и эффекта дохода)

Итак, изменение цены любого блага в наборе обусловливает изменения в составе оптимального набора и в объемах спроса на отдельные блага. Общий эффект от изменения цены объясняется реализацией двух эффектов: эффекта субституции (замены, замещения) и эффекта дохода (по ценам). Данное утверждение справедливо, по крайней мере, по отношению к стандартным предпочтениям. Рассмотрим алгоритм декомпозиции, т. е. вычленения величин эффектов в совокупном изменении оптимального количества блага и, соответственно, в изменении объема спроса. Начнем с эффекта субституции, который выделим отдельно по каждому благу в наборе.

Согласно определению, величина эффекта субституции для относительно подорожавшего блага будет отрицательной; для относительно подешевевшего – положительной. Поскольку эффект субституции выделяется при неизменном реальном доходе, требуется уточнение данного понятия.

Трактовка понятия *неизменный реальный доход* неоднозначна. Выделяют две трактовки понятия «реальный доход» и, соответственно, два метода определения величины неизменного реального дохода: хиксианский и слуцкианский.

В рамках подхода Хикса (*Hicks*) реальный доход рассматривается как уровень удовлетворения (полезности). Следовательно, сохранение реального дохода неизменным предполагает формирование набора с такой же полезностью, какую имел начальный оптимальный набор. Иначе говоря, точка нового оптимума при реализации эффекта субституции находится на той же кривой безразличия, что и точка начального оптимума.

Реальный доход по Слуцкому (*Slutski*) трактуется как покупательная способность. Тогда неизменный реальный доход означает, что оптимум при новых ценах формируется в условиях сохранения начальной покупательной способности, или: решение принимается агентом на основе компенсированного бюджета, позволяющего в новых ценовых условиях приобрести исходный оптимальный набор. Линия компенсированного бюджета отражает новую структуру системы цен и проходит через точку начального оптимума.

Поскольку любое изменение в ценах изменяет величину реального дохода (независимо от принятой трактовки), при изменении относительных цен реализуется также и эффект дохода, всегда сопровождающийся смещением точки оптимума с одной кривой безразличия на другую.

Алгоритмы декомпозиции по Слуцкому и по Хиксу в целом одинаковы. Различие состоит в том, как определяется промежуточный оптимум агента, или, при формализации процесса декомпозиции, как определяется состав промежуточного оптимума. В рамках подхода Слуцкого состав промежуточного оптимального набора определяется при условии сохранения покупательной способности агента. В рамках подхода Хикса промежуточный оптимум определяется при условии сохранения уровня полезности. Общее описание алгоритма декомпозиции представлено на рис. 5.5.

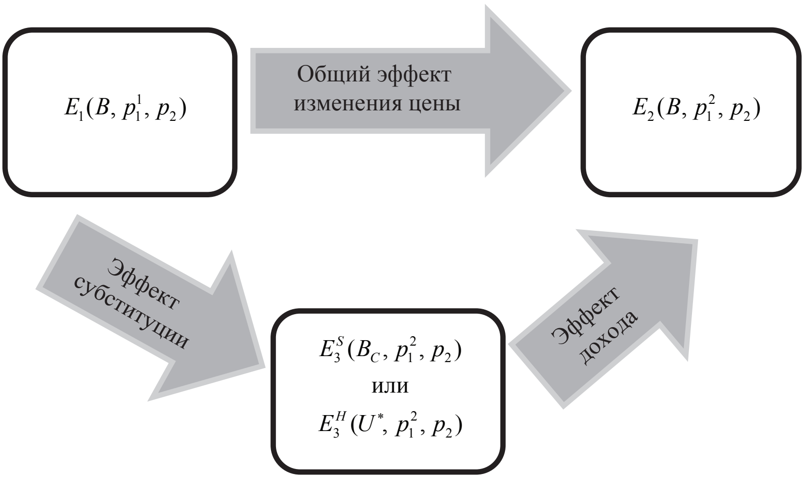

Рис. 5.5. Алгоритм декомпозиции общего эффекта от изменения цены первого блага

Алгоритм декомпозиции предполагает последовательную реализацию ряда этапов:

1) определяется состав начального оптимального набора (координаты точки E_1);

2) определяется состав нового оптимального набора (координаты точки E_2);
3) определяется общий эффект от изменения цены;
4) определяется состав промежуточного оптимального набора (координаты точки E_3);
5) выделяется эффект субституции и определяется его величина для каждого компонента набора;
6) выделяется эффект дохода[37] и определяется его величина для каждого компонента набора.

Определение начального оптимального набора (E_1) осуществляется постановкой и решением задачи потребителя на максимум полезности. Ограничение на расходы регулируется исходными ценовыми условиями и величиной начального бюджета. Новый оптимум (E_2) – результат решения задачи на максимум полезности при ограничении на расходы, регулируемом величиной имеющегося бюджета и новыми ценами. Промежуточный оптимум (E_3) можно получить, решив задачу потребителя, тип которой определяется применяемым подходом к трактовке понятия «реальный доход».

Важно понимать, что реализация эффекта субституции означает переход от начального оптимума (E_1) к промежуточному равновесию (E_3). Следовательно, для определения величины эффекта субституции по каждому благу необходимо из координат точки E_3 вычесть координаты точки E_1. Реализация эффекта дохода означает переход от промежуточного оптимума (E_3) к новому оптимуму (E_2). Таким образом, величина эффекта дохода для каждого блага определяется вычитанием из соответствующих координат точки E_2 координат точки E_3.

Рассмотрим декомпозицию, т. е. разложение общего эффекта от изменения цены на эффект субституции, и эффект дохода в условиях повышения цены первого блага. Будем полагать, что предпочтения агента стандартны и описываются функцией

[37] При решении задач рекомендуется производить проверку полученных результатов. Сумма величин эффекта субституции и эффекта дохода должна дать величину общего эффекта от изменения цены по каждому компоненту набора.

полезности Кобба – Дугласа. Повышение цены первого блага приводит к изменению угла наклона бюджетной линии, она становится круче, поворачиваясь вокруг точки на оси ординат. Ценовые изменения обусловили относительное подорожание первого блага и относительное удешевление второго. При этом в абсолютном выражении второе благо может оставаться дороже первого.

Поскольку изменяется цена первого блага, для него определяются прямые эффекты субституции и дохода, для второго блага – перекрестные эффекты субституции и дохода.

5.3.1. Декомпозиция Слуцкого

Декомпозиция совокупного эффекта от повышения цены первого блага, согласно подходу Слуцкого, предполагает поиск промежуточного оптимума посредством постановки и решения задачи на максимум полезности при ограничении на расходы величиной компенсированного бюджета. Величина компенсированного дохода (бюджета) B_c^S определяется как сумма денег, позволяющая приобрести в новых ценовых условиях $(p_1^2; p_2)$ исходный оптимальный набор E_1:

$$B_C^S = \overline{P_2} \cdot \overline{E_1} = p_1^2 \cdot z_1^1 + p_2 \cdot z_2^1. \tag{5.6}$$

Итак, промежуточное равновесие по Слуцкому находим из решения задачи на максимум полезности в новых ценовых условиях при компенсированном доходе (бюджете). Задача имеет вид:

$$\begin{cases} \max\limits_{z_1,\, z_2} U\left(z_1,\, z_2\right), \\ B_C^S - p_1^2 \cdot z_1 - p_2 \cdot z_2 = 0, \\ z_i > 0,\ \forall\, i = 1,\, 2. \end{cases} \tag{5.7}$$

Алгоритм решения подобных задач был неоднократно и подробно рассмотрен ранее. Следует обратить внимание на то, что промежуточный оптимум по Слуцкому находится на более высокой кривой безразличия, нежели точка начального оптимума.

Определив составы всех оптимальных наборов, производим декомпозицию по Слуцкому. Графическая иллюстрация декомпозиции по Слуцкому представлена на рис. 5.6.

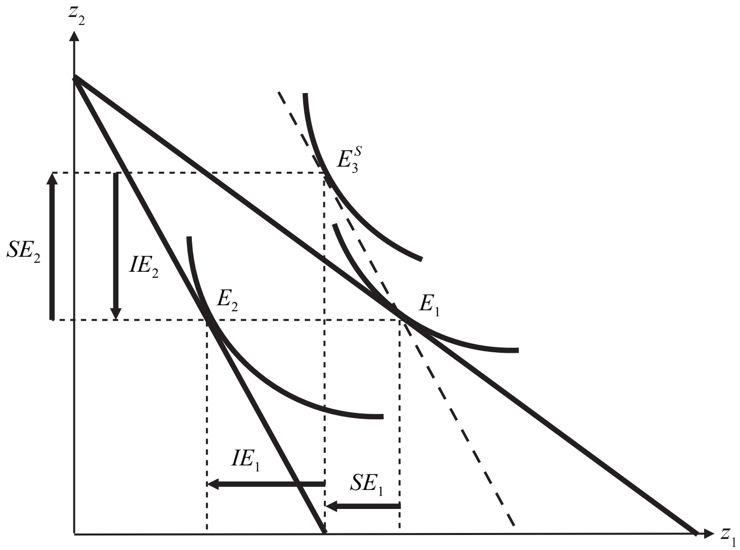

Рис. 5.6. Декомпозиция совокупного эффекта от повышения цены первого блага по Слуцкому

Формальный анализ декомпозиции общего эффекта для спроса от изменения цены первого блага по Слуцкому даст следующий результат:

$$\frac{\partial z_1(B,\, p_1,\, p_2)}{\partial p_1} = \frac{\partial z_1^S(p_1,\, z_1^1,\, z_2^1)}{\partial p_1} - \frac{\partial z_1(B_C^S,\, p_1^2,\, p_2)}{\partial B} \cdot z_1^1. \qquad (5.8)$$

Уравнение (5.8) называется тождеством Слуцкого в дифференциальной форме. Левая часть тождества – общий эффект изменения цены. Первый элемент в правой части – эффект субституции; второй элемент правой части – эффект дохода.

В общем виде уравнение Слуцкого позволяет определить не только прямые, но и перекрестные эффекты субституции и дохода. Это уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial z_i}{\partial p_j} = \frac{\partial z_i^S}{\partial p_j} - \frac{\partial z_i}{\partial B} \cdot z_i^1. \tag{5.9}$$

По формуле (5.9) в случае, если $i = j$, определяются прямые эффекты субституции и дохода; если $i \neq j$, определяются перекрестные эффекты.

5.3.2. Декомпозиция Хикса

Теперь обратимся к анализу декомпозиции совокупного эффекта от повышения цены первого блага в рамках подхода Хикса.

По Хиксу, неизменный реальный доход – это неизменная полезность, получаемая агентом от потребления. Таким образом, промежуточный оптимальный набор согласно Хиксу должен обеспечивать потребителю ту же полезность, что и исходный оптимальный набор. Для определения состава промежуточного оптимального набора необходимо поставить и решить *двойственную задачу потребителя* – задачу на минимум потребительских расходов при ограничении на полезность (U^*). Поскольку речь идет о новом типе задачи потребителя, ее структура и методы решения более подробно рассматриваются в подразделе 5.3.3.

Особенность декомпозиции в рамках подхода Хикса состоит в том, что точка промежуточного оптимума (E_3), полученного в результате реализации эффекта субституции, располагается на той же кривой безразличия, что и начальная точка оптимума.

При графическом анализе промежуточный оптимальный набор – точка, где бюджетная линия с новым наклоном касается кривой безразличия, содержащей исходный оптимальный набор (E_1). Графическая иллюстрация декомпозиции по Хиксу представлена на рис. 5.7.

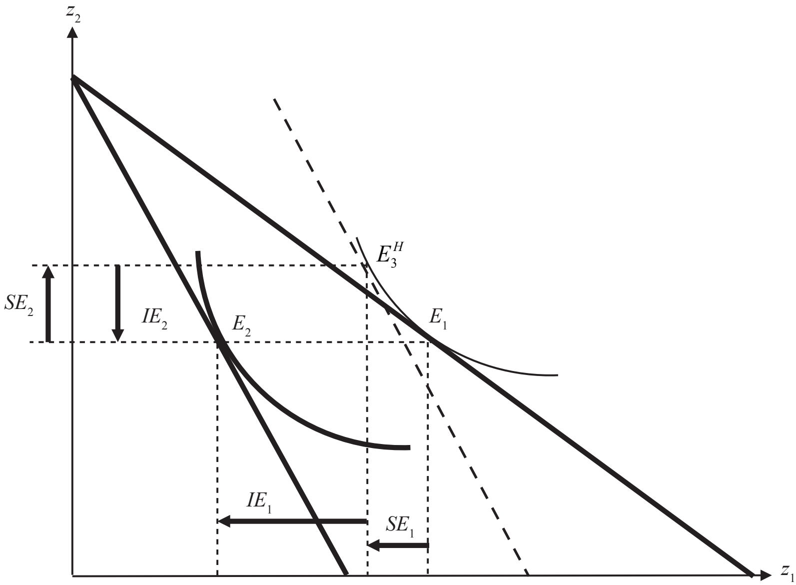

Рис. 5.7. Декомпозиция совокупного эффекта
от повышения цены первого блага по Хиксу

Формальное представление декомпозиции по Хиксу выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial z_1(B, p_1, p_2)}{\partial p_1} = \frac{\partial z_1^H(U^*, p_1, p_2)}{\partial p_1} - \frac{\partial z_1(B, p_1, p_2)}{\partial B} \cdot z_1^1. \qquad (5.10)$$

Левая часть уравнения (5.10) – общий эффект от изменения цены первого блага; первый элемент правой части – эффект субституции; второй элемент правой части – эффект дохода.

5.3.3. Двойственная задача потребителя

Задача на минимум потребительских расходов в общем виде, для любых типов предпочтений и случая n благ ($n > 2$) представлена системой (5.11), в которой целевая функция – суммарные потребительские расходы – минимизируется. Будем исходить из того, что предпочтения потребителя могут быть любыми, и по-прежнему будем полагать, что изменяется цена только одного блага – первого:

$$\begin{cases} \min\limits_{z_1,\, z_2,\, \ldots,\, z_n} (p_1^2 \cdot z_1 + p_2 \cdot z_2 + \ldots + p_n \cdot z_n), \\ U^* - U\left(z_1, z_2, \ldots, z_n\right) = 0, \\ z_i \geq 0,\ \forall\, i = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{5.11}$$

Ограничение на уровень полезности набора в двойственной задаче определяется полезностью исходного оптимального набора:

$$U^* = U\left(\overline{E_1}\right) = U\left(z_1^1, z_2^1, \ldots, z_n^1\right). \tag{5.12}$$

Двойственная задача потребителя, как и прямая задача на максимум полезности при ограничении на расходы, наиболее эффективно (для любых предпочтений, заданных на наборах с любым количеством благ) решается с помощью метода неопределенных множителей Лагранжа.

Строим функцию Лагранжа (лагранжиан) для данной задачи:

$$\mathcal{L}\left(z_1, z_2, \ldots, z_n, \mu\right) = \left[p_1^2 \cdot z_1 + p_2 \cdot z_2 + \ldots + p_n \cdot z_n\right] + \mu\left[U^* - U\left(\overline{Z}\right)\right], \tag{5.13}$$

где $\overline{Z} \equiv \left(z_1, z_2, \ldots, z_n\right)$.

Лагранжиан для двойственной задачи потребителя является функцией $(n + 1)$-переменной: n компонентов потребительского набора и μ – неопределенный множитель Лагранжа. Экономический смысл неопределенного множителя Лагранжа в задаче на минимум потребительских расходов при ограничении на полезность набора – расходы на дополнительную единицу полезности.

Функцию Лагранжа для задачи на минимум потребительских расходов минимизируем:

$$\mathcal{L}\left(z_1, z_2, \ldots, z_n, \mu\right) \to \min. \tag{5.14}$$

Поскольку предпочтения агента неизвестны и могут быть немонотонными и нестрого выпуклыми, для решения задачи используем условия Куна – Таккера (*Kuhn – Tucker conditions*).

В представленной формулировке задачи (5.11) необходимыми условиями (F.O.C.) достижения лагранжианом экстремума является неотрицательность первых n частных производных (по z_i). По определению, неизменный реальный доход обеспечивается потребителю в случае сохранения уровня полезности неизменным, поэтому нас интересуют только такие наборы, которые лежат на гиперповерхности безразличия[38], содержащей исходный оптимальный набор. Следовательно, производная лагранжиана по μ должна быть равна нулю, при этом $\mu \geq 0$.

Тогда условия Куна – Таккера для задачи на минимум потребительских расходов при ограничении на уровень полезности набора будут иметь вид системы (5.15), состоящей из $(3n + 2)$ уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial z_i} = p_i - \mu^0 \cdot \dfrac{\partial U\left(\overline{Z^0}\right)}{\partial z_i} \geq 0,\ \forall i = \overline{1, n}\ (\mathrm{I}), \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial z_i} \cdot z_i^0 = \left[p_i - \mu^0 \cdot \dfrac{\partial U\left(\overline{Z^0}\right)}{\partial z_i} \right] \cdot z_i^0 = 0,\ \forall i = \overline{1, n}\ (\mathrm{II}), \\ z_i^0 \geq 0,\ \forall i = \overline{1, n}\left(\mathrm{III}\right), \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial \mu} = U^* - U\left(\overline{Z^0}\right) = 0\ (\mathrm{IV}), \\ \mu^0 \geq 0\ (\mathrm{V}). \end{cases} \tag{5.15}$$

Дальнейшие шаги аналогичны тем, которые были предприняты в анализе прямой задачи потребителя. Поскольку агент может принять угловое решение ($z_i^0 \geq 0$), необходимо рассмотреть

[38] Гиперповерхность безразличия – аналог кривой безразличия для случаев $n > 3$; при $n = 3$ аналогом кривой безразличия является поверхность безразличия.

условия дополняющей нежесткости, получаемые из уравнений типа (I), (II), (III) системы уравнений (5.15).

Условие дополняющей нежесткости для двойственной задачи потребителя представляет собой совокупность соотношений (5.16) и (5.17):

$$\text{если } p_i - \mu^0 \cdot \frac{\partial U\left(\overline{Z^0}\right)}{\partial z_i} > 0, \text{ то } z_i^0 = 0; \tag{5.16}$$

$$z_i^0 > 0, \text{ если } p_i - \mu^0 \cdot \frac{\partial U\left(\overline{Z^0}\right)}{\partial z_i} = 0. \tag{5.17}$$

Из соотношений типа (5.17), с учетом того, что

$$\frac{\partial U\left(\overline{Z^0}\right)}{\partial z_i} \equiv MU_i^0,$$

после ряда преобразований можно получить условие оптимальности для двойственной задачи потребителя[39]:

$$\frac{p_1}{MU_1^0} = \frac{p_2}{MU_2^0} = \ldots = \frac{p_k}{MU_k^0} = \mu^0. \tag{5.18}$$

Важно учитывать, что блага, для которых выполняется соотношение (5.16), в оптимальном наборе присутствуют в нулевых количествах, поэтому в оптимальном наборе может содержаться k видов благ с положительным объемом, при этом $k \le n$.

Решение системы (5.15) позволяет получить представление о структуре и составе промежуточного оптимального набора по Хиксу.

[39] Ранее рассматривалось условие оптимальности для прямой задачи – уравнение (3.16). Сопоставление условий оптимальности для прямой и двойственной задач потребителя позволяет установить соотношение между величинами неопределенных множителей Лагранжа в обеих задачах: $\mu^0 = \frac{1}{\lambda^0}$.

5.3.4. Функции спроса на благо по Маршаллу и по Хиксу для стандартных предпочтений

На основе модели поведения потребителя выводятся функции индивидуального спроса на блага, включаемые потребителем в оптимальный набор. Анализ этих функций позволяет формально вывести типы зависимостей объема спроса на благо от тех факторов, которые были интуитивно получены в анализе рыночного спроса на рынках благ.

Функции спроса по Маршаллу (маршаллианские функции спроса) выводятся из задачи на максимум полезности при ограничении на расходы. Они отражают рыночное поведение потребителя и являются функциями так называемого некомпенсированного спроса.

Решение прямой задачи потребителя приведено в подразделе 4.1 достаточно подробно, причем для нескольких типов предпочтений при $n = 2$.

Наиболее часто рассматриваемым типом предпочтений являются стандартные предпочтения, описываемые функцией полезности Кобба – Дугласа. В случае с n ($n > 2$) благами функция Кобба – Дугласа имеет вид:

$$U\left(z_1, z_2, \ldots, z_n\right) = \prod_{i=1}^{n} z_i^{a_i}. \qquad (5.19)$$

Спрос на блага – компоненты оптимального набора в этом случае может быть представлен функциями вида

$$d_i \equiv z_i^0 = \frac{a_i}{\sum_{j=1}^{n} a_j} \cdot \frac{B}{p_i}, \ \forall\, i = \overline{1, n}. \qquad (5.20)$$

Подставив полученные функции в исходную функцию полезности, получим *косвенную функцию полезности* $\tilde{U}\left(B, p_1, p_2, \ldots, p_n\right)$ вида:

$$\tilde{U}\left(B, p_1, p_2, \ldots, p_n\right) = \left[\frac{B}{\sum_{j=1}^{n} a_j}\right]^{\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)} \cdot \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{a_i}{p_i}\right]^{a_i}. \qquad (5.21)$$

Косвенная функция полезности показывает зависимость полезности от цен товаров и величины бюджета.

Функции спроса по Хиксу являются функциями компенсированного спроса и выводятся из задачи на минимум потребительских расходов при ограничении на полезность. Для стандартных предпочтений (при $n = 2$), описываемых функцией Кобба – Дугласа вида $U\left(z_1, z_2\right) = z_1^a z_2^b$, получим две хиксианские функции спроса:

$$h_1\left(U^*, p_1, p_2\right) = \left[U^*\left(\frac{ap_2}{bp_1}\right)^b\right]^{\frac{1}{a+b}}; \quad (5.22)$$

$$h_2\left(U^*, p_1, p_2\right) = \left[U^*\left(\frac{bp_1}{ap_2}\right)^a\right]^{\frac{1}{a+b}}. \quad (5.23)$$

Анализ функций маршаллианского и хиксианского спроса для стандартных предпочтений позволяет выявить основные формализуемые факторы, влияющие на рыночные решения домашнего хозяйства, и направления воздействия их изменений на объем планируемых покупок. Так, цена блага, изменяясь, обусловливает изменение объема спроса в противоположном направлении. Между величиной бюджета и объемом спроса существует положительная связь. Изменение цены блага-субститута приводит к однонаправленному изменению спроса на данное благо. К числу факторов спроса следует отнести и степени эффективности благ в потреблении, а также соотношение этих эффективностей. При этом между объемом спроса на конкретное благо и его эффективностью в потреблении существует положительная связь, тогда как более высокая оценка эффективности в потреблении другого блага снижает объем спроса на рассматриваемое благо.

Наряду с формализуемыми факторами на рыночные решения потребителя могут оказать воздействие и неформализуемые факторы: уровень богатства; ожидания; внешние эффекты в потреблении.

Под *у р о в н е м   б о г а т с т в а* понимается денежная оценка материальных и прочих активов, имеющихся в распоряжении агента к настоящему времени; зависит уровень богатства от уровней доходов предшествующих периодов.

О ж и д а н и я   а г е н т а – совокупность его представлений о будущих событиях (доходе; ценах; налоговом режиме; мерах социальной поддержки и т. п.). В анализе поведения потребителя актуально подразделить ожидания на ценовые и прочие; оптимистические и пессимистические.

В н е ш н и е   э ф ф е к т ы   в   п о т р е б л е н и и, которые могут быть характерны для агента, – это эффекты, обусловленные влиянием на принимаемые агентом решения параметров, не связанных с системой его собственных вкусов и предпочтений, имеющих экзогенный характер. Выделяют эффект следования большинству, эффект сноба и эффект Веблена[40].

Таким образом, на основе анализа поведения потребителя как оптимизатора выявлены факторы, оказывающие воздействие на объем планируемых покупок. Наряду с этими факторами необходимо принимать во внимание параметры, искажающие оптимизаторское поведение агента.

Типовые задания с решениями и ответами

Задание 5.1

Предпочтения потребителя A представимы функцией полезности, имеющей вид $U\left(z_1, z_2\right) = z_1 + 4\sqrt{z_2}$. Потребитель принимает решения о составе набора при ценах $\overline{P} = (4; 8)$ и бюджете M.

(а) Необходимо вывести для данного потребителя функции спроса от дохода (функции Энгеля).

(б) Необходимо охарактеризовать блага с позиций их принадлежности к группе нормальных, нейтральных или инфериорных благ.

---

[40] См. подробнее: *Лейбенстайн Х.* Эффект присоединения к большинству, эффект сноба и эффект Веблена в теории покупательского спроса // Теория потребительского поведения и спроса. СПб. : Экономическая школа, 1993. С. 304–325.

Решения и ответы

(а) Ранее, в задании 3.7, рассматривалась аналогичная функция полезности. Было установлено, что предпочтения такого вида квазилинейны. При заданных параметрах выбора спрос предъявляется только на второе благо, если доход агента меньше критического. Если после приобретения второго блага в объеме z_2^* такого, что

$$\frac{MU_1}{p_1} = \frac{MU_2(z_2^*)}{p_2},$$

у агента остаются неизрасходованные денежные средства, он будет тратить их исключительно на первый товар. Критическое значение дохода было рассчитано ранее и для данной задачи составляет 8 руб.

Тогда функции спроса от дохода (функции Энгеля) будут выглядеть следующим образом:

$$d_2(B) = z_2^0 = f(M) = \frac{M}{p_2} = \begin{cases} \dfrac{M}{8}, \text{ если } M \leq 8, \\ 1, \text{ если } M > 8; \end{cases}$$

$$d_1(B) = z_1^0 = \varphi(M) = \begin{cases} 0, \text{ если } M \leq 8, \\ \dfrac{M-8}{p_1} = \dfrac{M-8}{4} = \dfrac{M}{4} - 2, \text{ если } M > 8. \end{cases}$$

Графическая иллюстрация полученных функций Энгеля представлена на рис. 5.8. Поскольку данный рисунок содержит графики двух функций, для удобства отображения величина дохода (бюджета) фиксируется на осях ординат. Объемы благ отображаются на осях абсцисс.

(б) Анализ полученных функций Энгеля [см. пункт **(а)**] позволяет заключить, что:

– первое благо является нейтральным при уровне дохода, не превышающем 8 ден. ед.; это благо относится к группе нормальных при доходе, превышающем 8 ден. ед.;

– второе благо относится к группе нормальных при доходе, не превышающем 8 ден. ед.; при доходе, превышающем 8 ден. ед., благо становится нейтральным.

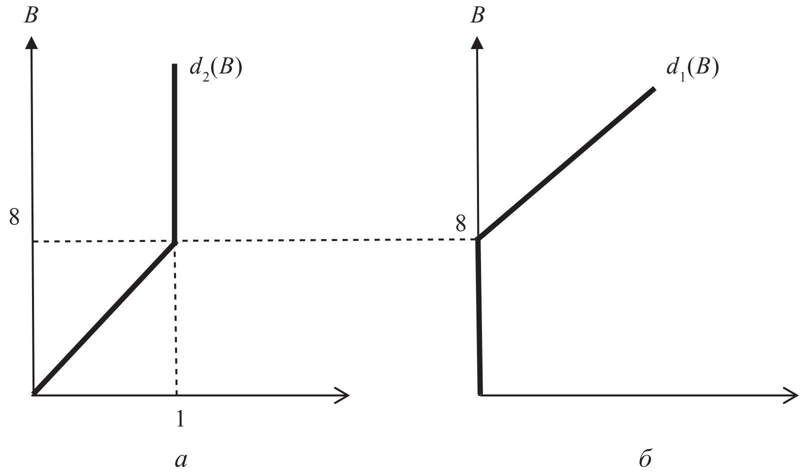

Рис. 5.8. Функции Энгеля для квазилинейных предпочтений:
а – для нелинейного блага; *б* – для линейного блага

Задание 5.2

Предпочтения потребителя N заданы на наборах из трех благ и представимы функцией полезности вида $U\left(z_1, z_2, z_3\right) = z_1^a z_2^b z_3^c$. Потребитель имеет бюджет величиной B и действует при ценах $\overline{P} = (p_1, p_2, p_3)$.

(а) Необходимо найти функции Энгеля для данного агента и указать знак эффекта дохода для каждого блага.

(б) Какими факторами, наряду с величиной дохода (бюджета), определяется значение функции Энгеля?

Решения и ответы

(а) Поставим и решим задачу потребителя на максимум полезности при ограничении на расходы подробно рассмотренным в главе 3 способом. Из условия оптимальности получим соотношения благ в оптимуме. Подставляя эти соотношения в бюджетное ограничение, при неизменных ценах благ получим функции Энгеля:

$$z_1^0 = \frac{a}{(a+b+c)} \cdot \frac{B}{p_1} = \alpha \cdot B, \text{ где } \alpha = \frac{a}{\left(a+b+c\right) \cdot p_1} = \text{const};$$

$$z_2^0 = \frac{b}{(a+b+c)} \cdot \frac{B}{p_2} = \beta \cdot B, \quad \text{где } \beta = \frac{b}{\left(a+b+c\right) \cdot p_2} = \text{const};$$

$$z_3^0 = \frac{c}{(a+b+c)} \cdot \frac{B}{p_3} = \gamma \cdot B, \text{ где } \gamma = \frac{c}{\left(a+b+c\right) \cdot p_3} = \text{const}.$$

Полученные функции демонстрируют линейный характер зависимости количества нормального блага в оптимальном наборе от величины бюджета.

Эффект дохода для каждого из благ будет положительным при увеличении дохода и отрицательным при его уменьшении.

(б) Среди факторов, определяющих объем блага в оптимальном наборе, фигурируют предпочтения агента и, в частности, соотношение эффективностей благ в потреблении. Чем более эффективно благо (чем выше его ранг в системе предпочтений), тем больше доля расходов на него.

Задание 5.3

Потребитель принимает решения при ценах $\overline{P} = (10; 5; 20)$, имея в своем распоряжении 4 200 рублей. Предпочтения агента описываются функцией полезности:

$$U\left(\overline{Z}\right) = z_1^{1/8} z_2^{1/2} z_3^{1/4}.$$

(а) Найдите состав исходного оптимального набора.

(б) Второй товар подорожал в 2 раза. Найдите состав нового оптимального набора и определите общий эффект от изменения цены для всех благ, входящих в оптимальный набор.

(в) Произведите декомпозицию Слуцкого, определив прямые и перекрестные эффекты субституции (замещения) и дохода.

(г) Произведите декомпозицию Хикса, определив прямые и перекрестные эффекты субституции и дохода.

Решения и ответы

(а) Предпочтения потребителя стандартны: строго монотонны и строго выпуклы. Состав оптимального набора найдем из задачи на максимум полезности, сформулированной как классическая оптимизационная задача:

$$\begin{cases} \max U(z_1, z_2, z_3), \\ 4\,200 - 10z_1 - 5z_2 - 20z_3 = 0, \\ z_1, z_2, z_3 > 0. \end{cases}$$

Алгоритм решения таких задач был рассмотрен подробно в главе 3. Более того, в подразделе 5.3.4 из классической оптимизационной задачи были получены функции маршаллианского спроса на блага. Воспользуемся теоретическими выкладками (5.20), которые дают общий вид функции спроса:

$$z_i^0 = \frac{a_i B}{\left(\sum a_i\right) \cdot p_i}.$$

Тогда

$$z_1^0 = \frac{\frac{1}{8} \cdot 4\,200}{\frac{7}{8} \cdot 10} = 60; \quad z_2^0 = \frac{0{,}5 \cdot 4\,200}{\frac{7}{8} \cdot 5} = 480; \quad z_3^0 = \frac{\frac{1}{4} \cdot 4\,200}{\frac{7}{8} \cdot 20} = 60.$$

Состав оптимального набора: (60; 480; 60).

(б) В новых ценовых условиях задача потребителя имеет вид:

$$\begin{cases} \max U(z_1, z_2, z_3), \\ 4\,200 - 10z_1 - 10z_2 - 20z_3 = 0, \\ z_1, z_2, z_3 > 0. \end{cases}$$

Решаем эту задачу с помощью маршаллианских функций спроса для стандартных предпочтений (5.20). Получаем:

$$z_1^0 = \frac{\frac{1}{8}\cdot 4\,200}{\frac{7}{8}\cdot 10} = 60;\;\; z_2^0 = \frac{0{,}5\cdot 4\,200}{\frac{7}{8}\cdot 10} = 240;\;\; z_3^0 = \frac{\frac{1}{4}\cdot 4\,200}{\frac{7}{8}\cdot 20} = 60.$$

Состав нового оптимального набора: (60; 240; 60).

Общий эффект от повышения цены второго блага:

$$\Delta z_1^0 = 0;\;\; \Delta z_2^0 = -240;\;\; \Delta z_3^0 = 0.$$

(в) Для декомпозиции Слуцкого необходимо найти промежуточный оптимум при компенсированном доходе в новых ценовых условиях.

Находим B_C^S = 10 · 60 + 10 · 480 + 20 · 60 = 6 600 (ден. ед.). Ставим еще одну задачу на максимум полезности с ограничением на расходы, определяемым величиной компенсированного дохода:

$$\begin{cases} \max U(z_1, z_2, z_3), \\ 6\,600 - 10z_1 - 10z_2 - 20z_3 = 0, \\ z_1, z_2, z_3 > 0. \end{cases}$$

Находим решение этой задачи, воспользовавшись маршаллианскими функциями спроса:

$$z_1^0 = \frac{\frac{1}{8}\cdot 6\,600}{\frac{7}{8}\cdot 10} \approx 94{,}3;\;\; z_2^0 = \frac{0{,}5\cdot 6\,600}{\frac{7}{8}\cdot 10} \approx 377{,}1;\;\; z_3^0 = \frac{\frac{1}{4}\cdot 6\,600}{\frac{7}{8}\cdot 20} \approx 94{,}3.$$

Состав промежуточного оптимального набора: (94,3; 377,1; 94,3).

После определения состава всех оптимальных наборов:

$$\overline{E}_1 = \left(60; 480; 60\right);\; \overline{E}_2 = \left(60; 240; 60\right);\; \overline{E_3^S} = (94{,}3;\, 377{,}1;\, 94{,}3) -$$

можем произвести декомпозицию общего эффекта изменения цены второго блага для спроса на все блага из набора.

По второму благу будут определены величины прямых эффектов субституции и дохода; по первому и третьему благам – перекрестные эффекты субституции и дохода. Данные заносим в таблицу:

Эффект	Реализация эффекта	Δz_1	Δz_2	Δz_3
TE	$E_1 \to E_2$	0	−240	0
SE	$E_1 \to E_3^S$	+34,3	−102,9	+34,3
IE	$E_3^S \to E_2$	−34,3	−137,1	−34,3

(г) Для того чтобы осуществить декомпозицию Хикса, необходимо найти промежуточный оптимум. С этой целью формулируется двойственная задача потребителя – задача на минимум потребительских расходов при ограничении на полезность вида:

$$\begin{cases} \min\,(10z_1 + 10z_2 + 20z_3), \\ U^* - z_1^{1/8} z_2^{1/2} z_3^{1/4} = 0, \\ z_i > 0, \forall i = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Ограничением в задаче выступает величина полезности набора: искомый набор должен обеспечить такую же полезность, которую потребитель получал от исходного оптимального набора:

$$U^* = U\left(\overline{E}_1\right) = 60^{\frac{1}{8}} \cdot 480^{\frac{1}{2}} \cdot 60^{\frac{1}{4}} = 60^{\frac{7}{8}} \cdot 8^{\frac{1}{2}}.$$

Поскольку предпочтения потребителя стандартны, оптимальное решение – внутреннее и единственное. Решая задачу методом неопределенных множителей Лагранжа, получим выполнение условия оптимальности набора вида:

$$\frac{p_1}{MU_1^0} = \frac{p_2}{MU_2^0} = \frac{p_3}{MU_3^0} = \mu^0.$$

Из условия оптимальности можно получить следующие равенства:

$$\left|MRS_{21}^{0}\right| = \frac{p_1}{p_2} \text{ и } \left|MRS_{31}^{0}\right| = \frac{p_1}{p_3}.$$

Ранее рассматривался алгоритм для определения

$$|MRS_{ji}| = \frac{a_i}{a_j} \cdot \frac{z_j}{z_i}.$$

Тогда

$$\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{z_2^0}{z_1^0} = \frac{p_1}{p_2} \text{ и } \frac{a_1}{a_3} \cdot \frac{z_3^0}{z_1^0} = \frac{p_1}{p_3}.$$

Из данных соотношений получим:

$$z_2^0 = \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{p_1}{p_2} \cdot z_1^0 = \frac{1/2}{1/8} \cdot \frac{10}{10} \cdot z_1^0 = 4z_1^0;\ z_3^0 = \frac{a_3}{a_1} \cdot \frac{p_1}{p_3} \cdot z_1^0 = \frac{1/4}{1/8} \cdot \frac{10}{20} z_1^0 = z_1^0.$$

Полученные выражения для z_2^0 и z_3^0 через z_1^0 подставим в ограничение на полезность: $60^{\frac{7}{8}} \cdot 8^{\frac{1}{2}} - \left(z_1^0\right)^{1/8} \left(4z_1^0\right)^{1/2} \left(z_1^0\right)^{1/4} = 0.$ Преобразуем это уравнение, поместив переменные в левую часть, константу – в правую часть и возведя выражение в степень 8.

Из расчетов следует, что $z_1^0 \approx 89,4;\ z_2^0 \approx 357,6;\ z_3^0 \approx 89,4$. Тогда состав промежуточного оптимального набора – вектор (89,4; 357,6; 89,4).

После определения состава всех наборов:

$$\left[\bar{E}_1 = (60; 480; 60);\ \bar{E}_2 = (60; 240; 60);\ \bar{E}_3^H = (89,4; 357,6; 89,4)\right] -$$

можем произвести декомпозицию общего эффекта изменения цены второго блага для спроса на все блага из набора. По второму благу будут определены величины прямых эффектов субституции и дохода; по первому и третьему благам – перекрестные эффекты субституции и дохода.

Данные заносим в таблицу:

Эффект	Реализация эффекта	Δz_1	Δz_2	Δz_3
TE	$E_1 \to E_2$	0	−240	0
SE	$E_1 \to E_3^H$	+29,4	−122,4	+29,4
IE	$E_3^H \to E_2$	−29,4	−117,6	−29,4

Таким образом, декомпозиция произведена, определены величины эффектов дохода и субституции. Следовательно, задача решена.

Задание 5.4

Предпочтения агента *C* заданы на наборах из двух благ – *x* и *y*. Функция полезности, описывающая предпочтения, имеет вид: $U(x, y) = x + 5y$. Бюджет агента составляет 1 200 ден. ед. Исходный оптимальный набор агент формировал при ценах $\overline{P} = (10; 100)$. Затем произошло снижение цены блага *y* в 4 раза. Определите общие эффекты от изменения цены блага *y* для спроса на оба товара. Произведите декомпозицию, используя подход Слуцкого (необходимо выделить и прямые, и перекрестные эффекты дохода и субституции).

Решения и ответы

Для того чтобы определить общий эффект от изменения цены какого-либо блага, а затем произвести декомпозицию Слуцкого, необходимо поставить и решить три задачи на максимум полезности при ограничении на расходы. Затем, сопоставив соответствующие наборы, можно определить искомые величины. Алгоритм решения был подробно рассмотрен в предыдущем задании.

1) Найдем состав исходного оптимального набора $\overline{E_1}$. Предпочтения агента и соотношение цен таковы, что будет сформирован угловой набор. Убедиться в этом просто, если сопоставить

$$\frac{MU_x}{MU_y} \text{ и } \frac{p_x}{p_y}.$$

В исходных условиях агент приобретает только благо x, поскольку оно имеет бóльшую взвешенную предельную полезность. Можно также пойти по пути определения оптимальной оценки дохода:

$$\lambda^0 = \max\left\{\frac{1}{10}; \frac{5}{100}\right\} = \max\left\{\frac{1}{10}; \frac{1}{20}\right\} = \frac{1}{10}.$$

И качественный анализ, и расчеты приведут нас к одному результату. Состав исходного оптимального набора таков:

$$\overline{E}_1 = \left(\frac{1200}{10}; 0\right) = (120; 0).$$

2) Найдем состав оптимального набора в изменившихся ценовых условиях – набора $\overline{E_2}$. Оптимальная оценка дохода:

$$\lambda^0 = \max\left\{\frac{1}{10}; \frac{5}{25}\right\} = \max\left\{\frac{1}{10}; \frac{1}{5}\right\} = \frac{1}{5}.$$

Тогда спрос на блага:

$$x^0 = 0;\ y^0 = \frac{1\,200}{25} = 48.$$

Состав оптимального набора: $\overline{E_2} = (0; 48)$.

3) Определим величину компенсированного по Слуцкому дохода, B_C^S. Агент должен обладать суммой, которая позволит в новых ценовых условиях приобрести исходный оптимальный набор:

$$B_C^S\,(10; 25)\cdot\begin{pmatrix}120\\0\end{pmatrix} = 1\ 200.$$

Компенсированный и фактический доход одинаковы, следовательно, в новых ценовых условиях при компенсированном доходе будет формироваться набор (0;48). То есть расчеты не требуются, и $\overline{E_3^S} \equiv \overline{E_2}$.

4) Получив информацию о составе всех наборов, производим расчеты величин эффектов и заполняем таблицу, отражающую как общие эффекты от изменения цены, так и результаты декомпозиции:

Эффект	Реализация эффекта	Δx	Δy
TE	$E_1 \to E_2$	−120	+48
SE	$E_1 \to E_3^S$	−120	+48
IE	$E_3^S \to E_2$	0	0

Таким образом, произошедшее снижение цены блага y породило отрицателный эффект субституции по благу x и положительный эффект субституции по благу y. Эффект дохода отсутствует (равен нулю) по обоим направлениям.

Задание 5.5

Предпочтения агента X заданы на наборах из двух благ – z_1 и z_2. Функция полезности, описывающая предпочтения, имеет вид: $U\left(z_1, z_2\right) = \min\left\{2z_1; 5z_2\right\}$. Бюджет агента составляет 1 260 ден. ед. Исходный оптимальный набор агент формировал при ценах $\overline{P} = (10; 20)$. Затем произошло повышение цены первого блага в 2 раза.

Определите общий эффект от изменения цены первого блага для спроса на оба товара. Произведите декомпозицию, используя подход Слуцкого (необходимо выделить и прямые, и перекрестные эффекты дохода и субституции).

Решения и ответы

Предпочтения агента заданы на наборах из благ-комплементариев, о чем свидетельствует вид функции полезности. В главе 4 были выведены в общем виде функции спроса для двух благ-комплементариев. Воспользуемся формулами (4.5) и (4.6) для определения состава наборов[41]: исходного оптимального; оптимального в новых ценовых условиях; промежуточного по Слуцкому.

1) Найдем состав исходного оптимального набора E_1. Рассмотрим состав набора через векторную функцию спроса:

$$\overline{E}_1\left(B,\, p_1^1,\, p_2\right)=\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{bB}{\left(bp_1+ap_2\right)} \\ \dfrac{aB}{\left(bp_1+ap_2\right)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{5\cdot 1\,260}{(5\cdot 10+2\cdot 20)} \\ \dfrac{2\cdot 1\,260}{(5\cdot 10+2\cdot 20)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 70 \\ 28 \end{pmatrix}.$$

2) Действуя аналогичным образом, найдем состав нового оптимального набора:

$$\overline{E}_2\left(B,\, p_1^2,\, p_2\right)=\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{bB}{\left(bp_1+ap_2\right)} \\ \dfrac{aB}{\left(bp_1+ap_2\right)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{5\cdot 1\,260}{(5\cdot 20+2\cdot 20)} \\ \dfrac{2\cdot 1\,260}{(5\cdot 20+2\cdot 20)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 45 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

3) Рассчитаем величину компенсированного по Слуцкому дохода:

$$B_C^S=\left(p_1^2,\, p_2\right)\cdot\overline{E_1}=\left(20,20\right)\cdot\begin{pmatrix} 70 \\ 28 \end{pmatrix}=1\,960.$$

4) Определим состав промежуточного оптимального набора:

$$\overline{E_3^S}\left(B_C^S,\, p_1^2,\, p_2\right)=\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{5\cdot 1\,960}{(5\cdot 20+2\cdot 20)} \\ \dfrac{2\cdot 1\,960}{(5\cdot 20+2\cdot 20)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 70 \\ 28 \end{pmatrix}.$$

[41] Поскольку в задании не требуется вывести функции спроса, возможно применение «готовых рецептов». На контрольных мероприятиях и экзаменах использование результатов теоретического анализа без соответствующих формальных выкладок не допускается.

Как показывают расчеты, промежуточный оптимум совпадает с исходным. То есть эффект замещения равен нулю, чего и следовало ожидать, поскольку блага являются комплементариями. Общий эффект от изменения цены объясняется, таким образом, только действием эффекта дохода.

5) Зная состав всех наборов, определяем общий эффект от повышения цены первого блага и производим декомпозицию.

Результаты вносим в таблицу:

Эффект	Реализация эффекта	Δz_1	Δz_2
TE	$E_1 \to E_2$	−25	+10
SE	$E_1 \to E_3^S$	0	0
IE	$E_3^S \to E_2$	−25	−10

Задание 5.6

Как можно объяснить парадокс Гиффена (*Giffen's paradox*) на основе декомпозиции общего эффекта от изменения цены блага, спрос на которое увеличивается при росте цены?

Решение и ответ

Общий эффект от повышения цены на обычное благо отрицателен: отрицательна величина эффекта субституции ($SE < 0$); величина эффекта дохода также отрицательна ($IE < 0$), поскольку повышение цены вызывает снижение реального дохода.

Гиффеновы товары принадлежат к группе инфериорных. Спрос на такие товары зависит от величины дохода нетипичным образом:

$$\frac{\partial d_k}{\partial B} < 0.$$

Увеличение цены вызывает снижение реального дохода и, следовательно, увеличение объема спроса. При увеличении цены блага, таким образом, возникает положительный эффект дохода ($IE > 0$).

Особенность гиффеновых товаров состоит в том, что эффект дохода оказывается для них более значим, чем эффект субституции. Поскольку знаки у эффектов разные, общий эффект от изменения цены определяется величиной эффекта дохода.

В случае увеличения цены на гиффенов товар эффект замещения будет отрицательным; эффект дохода положительным; при этом $|SE| < IE$. Следовательно, общий эффект от увеличения цены будет положительным.

Задание 5.7

Необходимо найти косвенную функцию полезности для агента, имеющего предпочтения, представимые функцией полезности вида: $U\left(z_1, z_2\right) = z_1^2 z_2^3$.

Каким будет значение косвенной функции полезности, если агент располагает суммой в 100 руб. и принимает решения при ценах $\overline{P} = (1; 2)$?

Решение и ответ

Косвенная функция полезности показывает величину удовольствия, получаемого агентом от потребления, в зависимости от бюджета и цен благ.

Агент включает в набор блага в оптимальных объемах. Для их определения ставится задача на максимум полезности при ограничении на расходы. Результатом решения этой задачи являются маршаллианские функции спроса для стандартных предпочтений вида:

$$d_1 \equiv z_1^0 = \frac{2}{2+3} \cdot \frac{B}{p_1} = 0,4 \cdot \frac{B}{p_1}; \;\; d_2 \equiv z_2^0 = \frac{3}{2+3} \cdot \frac{B}{p_2} = 0,6 \cdot \frac{B}{p_2}.$$

Тогда косвенная функция полезности будет иметь следующий вид:

$$U\left(B, p_1, p_2\right) = \left(0,4 \cdot \frac{B}{p_1}\right)^2 \cdot \left(0,6 \cdot \frac{B}{p_2}\right)^3 =$$

$$= 0,4^2 \cdot 0,6^3 \cdot \frac{B^5}{p_1^2 \cdot p_2^3} = 0,03456 \cdot \frac{B^5}{p_1^2 \cdot p_2^3}.$$

Общий вид косвенной функции полезности показывает, что полезность (следовательно, и благосостояние агента) увеличивается с ростом дохода (бюджета) и уменьшается при увеличении цены/цен (снижается при уменьшении дохода и увеличивается при снижении цены/цен благ).

Производные косвенной функции полезности показывают, как меняется полезность набора при изменении цены блага или величины бюджета.

Подставив соответствующие значения цен и бюджета, получим значение косвенной функции полезности:

$$U\left(100; 1; 2\right) = 0,03456 \cdot \frac{100^5}{1^2 \cdot 2^3} = 4,32 \cdot 10^7.$$

6. ВЫБОР ПОТРЕБИТЕЛЯ В УСЛОВИЯХ НАТУРАЛЬНОГО ДОХОДА

До сих пор анализ строился на предположении о получении агентом исключительно денежного дохода. В действительности же агент может вести натуральное хозяйство и получать доход в натуральной форме. Кроме того, бóльшая часть домохозяйств получает доход от продажи принадлежащих им активов, продуктов своего труда, а чаще всего – от продажи самого труда. Поэтому необходимо рассмотреть расширение модели потребительского выбора для случая натурального дохода (или наличия исходного запаса благ).

6.1. Бюджетное ограничение при натуральном доходе

Предположим, агент действует в условиях двухтоварной экономики и имеет начальный запас благ первого и второго видов (ω_1, ω_2). Начальный запас показывает, какое количество благ имеется в распоряжении агента до вступления на рынок. На рынке агент может осуществлять как покупки, так и продажи указанных благ. Решения о покупках/продажах принимаются в зависимости от цен, сложившихся на товарных рынках, предпочтений агента и его бюджетного ограничения.

Отсутствие у агента денежного дохода не означает, что бюджетное ограничение для него не актуально. При натуральном доходе появляется специфика в формулировке бюджетного ограничения: вместо величины бюджета (суммы денег, предназначенной на цели текущего потребления) рассматривается денежная оценка натурального дохода (M). Расходы потребителя на набор благ определяются денежной оценкой начального запаса.

Денежная оценка зависит от состава запаса и цен благ, сложившихся на рынках, и определяется по формуле

$$M = \bar{P} \cdot \bar{\Omega} = p_1 \cdot \omega_1 + p_2 \cdot \omega_2. \tag{6.1}$$

Тогда бюджетное ограничение агента можно записать в виде нестрогого неравенства:

$$\left(p_1 \cdot \omega_1 + p_2 \cdot \omega_2 \right) - p_1 \cdot z_1 - p_2 \cdot z_2 \geq 0. \tag{6.2}$$

Бюджетное ограничение также может быть представлено в виде

$$p_1 \left(z_1 - \omega_1 \right) + p_2 (z_2 - \omega_2) \leq 0. \tag{6.3}$$

Если предпочтения агента монотонны, бюджетное ограничение формулируется в виде строгого равенства:

$$p_1 \left(z_1 - \omega_1 \right) + p_2 \left(z_2 - \omega_2 \right) = 0. \tag{6.4}$$

Уравнение бюджетной линии можно выписать на основе бюджетного ограничения (6.4):

$$z_2 = \frac{(p_1 \cdot \omega_1 + p_2 \cdot \omega_2)}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} \cdot z_1. \tag{6.5}$$

Из уравнения (6.5) видно, что тангенс угла наклона бюджетной линии отрицателен и равен $\frac{p_1}{p_2}$.

Бюджетная линия для агента с натуральным доходом показана на рис. 6.1. Следует обратить внимание на то, что бюджетная линия проходит через точку начального запаса *A* с координатами (ω_1, ω_2).

В случае изменения цены какого-либо блага бюджетная линия меняет наклон, поворачиваясь вокруг точки начального запаса. Поворот против часовой стрелки происходит при снижении цены первого блага или при увеличении цены второго блага. Если цена первого блага увеличивается или снижается цена второго блага, бюджетная линия поворачивается по часовой стрелке.

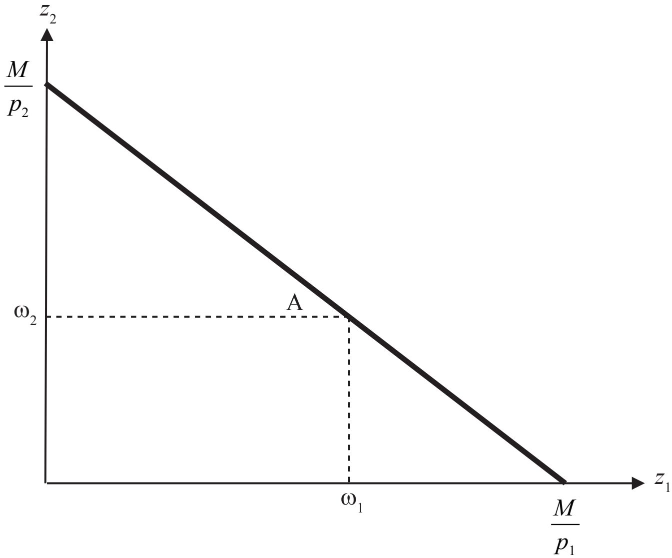

Рис. 6.1. Бюджетная линия агента, имеющего натуральный доход

6.2. Особенности оптимального выбора

Домашнее хозяйство – получатель натурального дохода – стремится использовать свой ресурсный запас наилучшим образом и сформировать набор с максимальной полезностью. Для поиска оптимального набора ставится задача на максимум полезности с ограничением по расходам. Для строго монотонных предпочтений, заданных на наборах из двух благ, задача будет иметь вид:

$$\begin{cases} \max\limits_{z_1,\, z_2} U\left(z_1, z_2\right), \\ \left(p_1 \cdot \omega_1 + p_2 \cdot \omega_2\right) - p_1 z_1 - p_2 z_2 = 0, \\ z_i > 0,\ \forall i = \overline{1, 2}. \end{cases} \tag{6.6}$$

Метод решения такой задачи был рассмотрен ранее, в подразделе 3.3. Специфика задачи (6.6) состоит исключительно в определении величины потенциальных расходов – денежной оценки натурального дохода.

Решением задачи (6.6) будут объемы благ в оптимальном наборе:

$$z_i^0 = F\left(\omega_1, \omega_2, p_1, p_2\right), \forall i = \overline{1, 2}. \qquad (6.7)$$

В формуле (6.7) представлены, по сути, функции валового спроса на блага.

В а л о в о й с п р о с н а б л а г о ($d_i \equiv z_i^0$) – это количество блага, которое агент желает включить в оптимальный набор.

Наряду с валовым спросом необходимо рассматривать также чистый спрос на блага.

Ч и с т ы й с п р о с н а б л а г о ($\tilde{d}_i$) – то количество блага, которое куплено (или продано), т. е. разница между валовым спросом на i-е благо и начальным запасом этого блага.

Чистый спрос на блага формально может быть представлен следующим образом:

$$\tilde{d}_i = z_i^0 - \omega_i, \forall i = \overline{1, 2}. \qquad (6.8)$$

Если агент является чистым покупателем блага, $\left(z_i^0 - \omega_i\right) > 0$. Агент – чистый продавец (осуществляет предложение блага), если $\left(z_i^0 - \omega_i\right) < 0$. Если же $\left(z_1^0 - \omega_1\right) = 0$ и $\left(z_2^0 - \omega_2\right) = 0$, агент не является участником рыночных трансакций.

Предположим, агент имеет стандартные предпочтения. Решая задачу по поиску оптимума графически, ищем точку, в которой бюджетная линия касается кривой безразличия. Определив состав оптимального набора, можем получить представление о чистом спросе данного агента на первое и второе блага. Следует понимать, что в случае несовпадения оптимума с начальным запасом агент продает одно благо и покупает другое. На рис. 6.2 показан состав оптимального набора агента, имеющего стандартные предпочтения, и (стрелками) – объемы чистого спроса на блага.

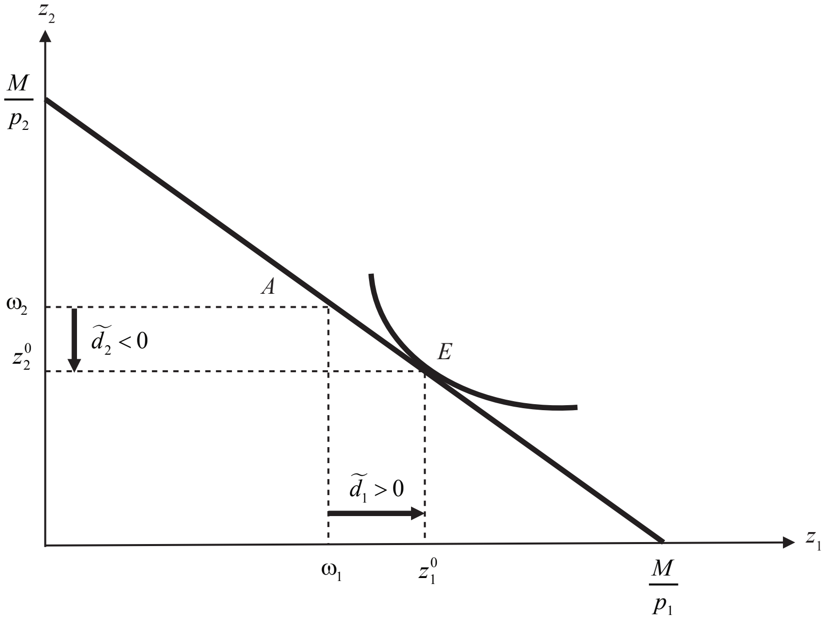

Рис. 6.2. Оптимум потребителя в случае натурального дохода
и чистый спрос на блага

Агент начнет продавать часть запаса второго блага. На вырученные деньги будет закуплено некоторое количество первого блага.

6.3. Декомпозиция общего эффекта от изменения цены в случае натурального дохода

В случае изменения цены любого из благ происходит изменение денежной оценки запаса. Как следствие, бюджетная линия меняет наклон, поворачиваясь вокруг точки начального запаса. Направление поворота бюджетной линии зависит от того, как поменялись относительные цены благ. Как отмечалось выше, поворот по часовой стрелке происходит, если второе благо становится относительно дешевле, а первое – относительно дороже. Поворот против часовой стрелки наблюдается в случае повышения относительной цены второго блага и/или снижения относительной цены первого блага.

Изменение относительных цен обусловливает изменение оптимального набора и объемов чистого спроса на блага. Как следствие, меняется поведение агента на рынках благ – пересматриваются объемы покупки/продажи. На рис. 6.3 показаны общие эффекты от снижения цены первого блага для случая стандартных предпочтений, а также изменения в рыночных решениях агента по поводу покупки/продажи отдельных благ, т. е. изменения чистого спроса на блага.

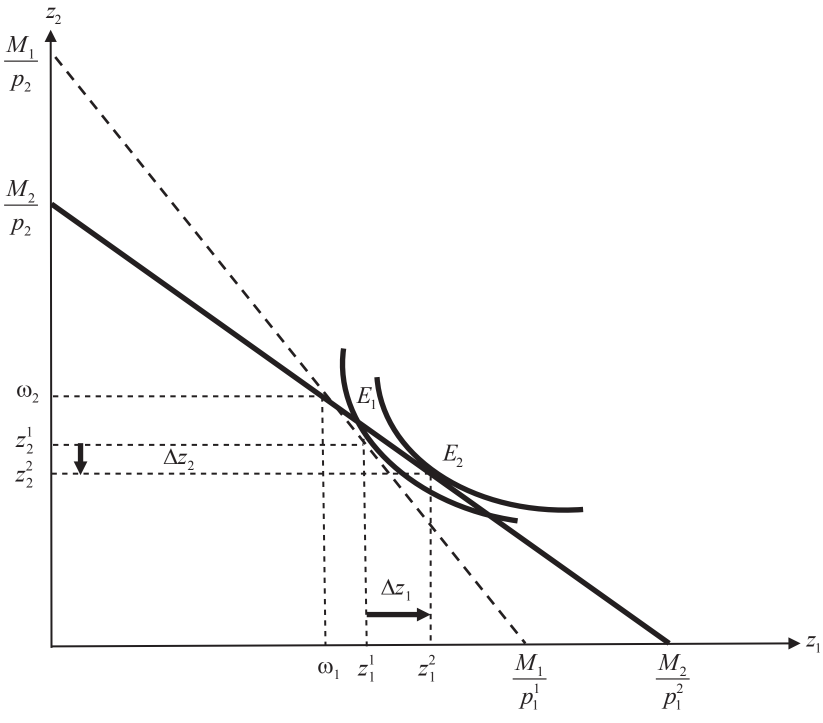

Рис. 6.3. Изменение оптимального набора благ и общий эффект от снижения цены первого блага в случае натурального дохода

В случае денежного дохода общий эффект от изменения цены объясняется действием эффекта замещения (*SE*) и эффекта дохода (*IE*). Эффект субституции обусловливает уменьшение спроса на относительно подорожавшее благо и увеличение спроса на относительно подешевевшее благо. Эффект дохода связан с изменением покупательной способности при изменении цены. При натуральном доходе изменение цены вызывает изменение покупательной способности по двум направлениям.

(1) Снижение цены блага позволяет приобрести тот же набор, что и раньше, понеся меньшие расходы; оставшиеся деньги дают возможность приобрести еще какие-то количества благ. В данном случае речь идет об «обычном» эффекте дохода.

(2) Изменение цены вызывает изменение стоимости начального запаса и, как следствие, изменение величины потенциальных расходов на блага. При снижении цены блага сумма потенциальных расходов уменьшается, при росте цены – увеличивается. Реализуется эффект дохода, связанный с начальным запасом (*эффект начального запаса*, *endowment income effect – EIE*).

Из всего вышесказанного следует, что общее изменение спроса объясняется действием трех эффектов:

$$\Delta d_i = \Delta z_i^0 = \Delta z_i^{SE} + \Delta z_i^{IE} + \Delta z_i^{EIE}. \qquad (6.9)$$

Формально общий эффект от изменения цены (первого) блага можно получить на основе полного дифференциала функции спроса:

$$\frac{dz_1\left(p_1, M\left(p_1\right)\right)}{dp_1} = \frac{\partial z_1(p_1, M)}{\partial p_1} + \frac{\partial z_1\left(p_1, M\right)}{\partial M} \cdot \frac{\partial M(p_1)}{\partial p_1}. \qquad (6.10)$$

В уравнении (6.10) второе слагаемое правой части показывает изменение количества первого блага в оптимальном наборе вследствие изменения покупательной способности денег и денежной оценки натурального дохода. Этот элемент можно представить в виде:

$$\frac{\partial z_1\left(p_1, M\right)}{\partial M} \cdot \frac{\partial M(p_1)}{\partial p_1} = \frac{\partial z_1\left(p_1, M\right)}{\partial M} \cdot \left(\omega_1 - z_1\right). \qquad (6.11)$$

Экономический смысл выражения (6.11) – величина эффекта богатства, объединяющего эффект дохода и эффект начального запаса. На основе уравнений (6.10) и (6.11) можно выписать модифицированное для случая натурального дохода уравнение Слуцкого:

$$\frac{dz_1\left(p_1, M\left(p_1\right)\right)}{dp_1} = \frac{\partial z_1^S(p_1)}{\partial p_1} + \frac{\partial z_1\left(p_1, M\right)}{\partial M} \cdot \left(\omega_1 - z_1\right). \qquad (6.12)$$

Преобразовав уравнение (6.12), получим развернутое модифицированное уравнение Слуцкого в дифференциальной форме для случая натурального дохода:

$$\frac{dz_1\left(p_1, M\left(p_1\right)\right)}{dp_1} = \frac{\partial z_1^S(p_1)}{\partial p_1} - \frac{\partial z_1\left(p_1, M\right)}{\partial M} \cdot z_1 + \frac{\partial z_1\left(p_1, M\right)}{\partial M} \cdot \omega_1. \quad (6.13)$$

В правой части уравнения (6.13) первый элемент – величина эффекта субституции; второй элемент – величина «обычного» эффекта дохода; третий элемент – величина эффекта начального запаса.

Таким образом, общий эффект от изменения цены блага при натуральном доходе является результатом реализации трех эффектов: эффекта субституции (*SE*), «обычного» эффекта дохода (*IE*) и эффекта начального запаса (*EIE*).

В случае, когда известен конкретный вид функции полезности, состав начального запаса, а также исходные и новые цены благ, для декомпозиции (по Слуцкому) необходимо последовательно поставить и решить четыре задачи на максимум полезности.

Алгоритм декомпозиции (в рамках подхода Слуцкого) в случае натурального дохода включает реализацию следующих этапов.

1. Определение состава оптимального набора при начальных ценах:

$$\overline{E_1} = F\left(\omega_1, \omega_2, p_1^1, p_2\right). \qquad (6.14)$$

2. Определение состава оптимального набора в новых ценовых условиях:

$$\overline{E_2} = F\left(\omega_1, \omega_2, p_1^2, p_2\right). \qquad (6.15)$$

3. Определение состава промежуточного набора, сформированного в новых ценовых условиях при компенсированном (по Слуцкому) бюджете:

$$\overline{E_3^S} = F\left(M_C^S,\, p_1^2,\, p_2\right). \tag{6.16}$$

4. Определение состава промежуточного набора, сформированного в новых ценовых условиях при уровне расходов, равном начальной денежной оценке натурального дохода:

$$\overline{E_4} = F\left(p_1^1 \cdot \omega_1 + p_2 \cdot \omega_2;\; p_1^2,\, p_2\right). \tag{6.17}$$

5. Определение величины общего эффекта от изменения цены первого блага (из координат точки $\overline{E_2}$ вычитаются координаты точки $\overline{E_1}$).

6. Определение величины эффекта субституции (из координат точки $\overline{E_3^S}$ вычитаются координаты точки $\overline{E_1}$).

7. Определение величины «обычного» эффекта дохода (из координат точки $\overline{E_4}$ вычитаются координаты точки $\overline{E_3^S}$).

8. Определение величины эффекта начального запаса (из координат точки $\overline{E_2}$ вычитаются координаты точки $\overline{E_4}$).

Сохраняя предположение о стандартных предпочтениях агента, произведем графическую декомпозицию общего эффекта от снижения цены первого блага, основываясь на рассмотренном выше алгоритме. На рис. 6.4 показаны величины эффекта субституции, эффекта дохода и эффекта начального запаса, полученные в результате декомпозиции совокупного эффекта от снижения цены первого блага в рамках подхода Слуцкого.

Изменение положения бюджетной линии, а значит – и точки оптимума будет наблюдаться и при изменении состава начального запаса. Поскольку состав запаса агента на рыночных ценах не отражается, бюджетная линия сохранит прежний наклон, однако сместится вправо или влево, в зависимости от того, как изменился состав запаса и, соответственно, изменилась его денежная оценка.

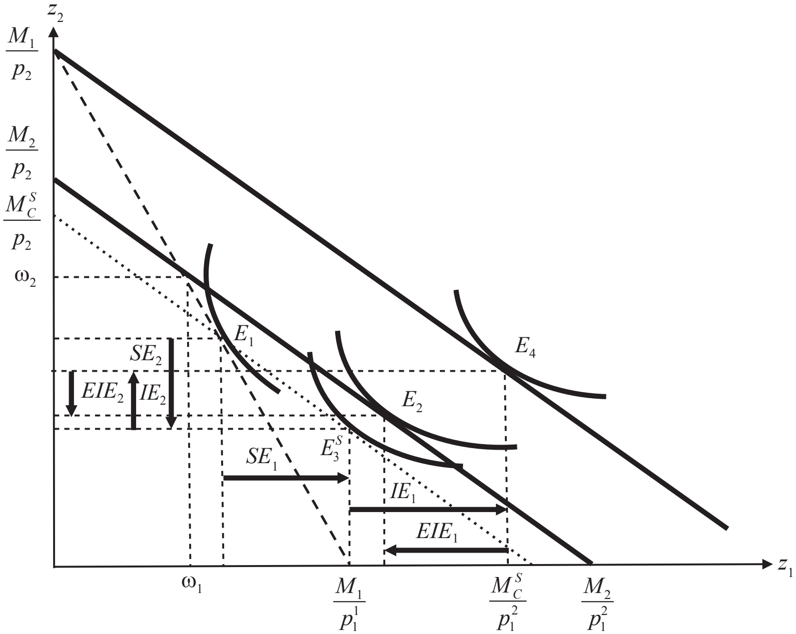

Рис. 6.4. Декомпозиция общего эффекта от снижения цены первого блага в случае натурального дохода (в рамках подхода Слуцкого)

Если денежная оценка изменившегося запаса увеличилась, произойдет правосторонний сдвиг бюджетной линии; если денежная оценка нового запаса стала меньше, бюджетная линия сдвинется влево. В этом случае реализуется один эффект – эффект начального запаса (*EIE*).

Типовые задания с решениями и ответами

Задание 6.1

Потребитель *A* имеет натуральный доход, состав которого определяет вектор: $\overline{\Omega} = (20; 50)$.

(а) Необходимо определить денежную оценку натурального дохода при ценах $\overline{P}_1 = (5; 4)$, а также максимально доступные количества первого и второго блага.

(б) Предположим, цены благ изменились и составляют: $\overline{P_2} = (4; 5)$. Какова денежная оценка натурального дохода при новых ценах? Как изменилось положение бюджетной линии?

(в) Цены благ вернулись к исходным значениям $\overline{P_1}$, а затем изменились и составляют: $\overline{P_3} = (5; 3)$. Какова денежная оценка натурального дохода в этом случае? Что происходит с бюджетной линией?

Решения и ответы

(а) Денежную оценку натурального дохода рассчитываем по формуле: $M_1 = \overline{P_1} \cdot \overline{\Omega}$. Она составит:

$$M_1 = 5 \cdot 20 + 4 \cdot 50 = 100 + 200 = 300 \text{ (ден. ед.)}.$$

Положение бюджетной линии: проходит через точку начального запаса (20; 50) и имеет угол наклона α, тангенс которого:

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{p_1}{p_2} = -\frac{5}{4} = -1,25.$$

Максимально доступное количество первого блага определяет общую точку бюджетной линии с осью абсцисс и составляет:

$$z_1^{\max} = \frac{M_1}{p_1} = \frac{300}{5} = 60 \text{ (ед. блага)}.$$

Максимально доступное количество второго блага определяет общую точку бюджетной линии с осью ординат и составляет:

$$z_2^{\max} = \frac{M_1}{p_2} = \frac{300}{4} = 75 \text{ (ед. блага)}.$$

(б) Денежная оценка натурального дохода при изменившихся ценах составит: $M_2 = 4 \cdot 20 + 5 \cdot 50 = 80 + 250 = 330$ (ден. ед.). То есть денежная оценка натурального дохода (начального запаса благ) возросла.

Положение новой бюджетной линии: проходит через точку начального запаса (20; 50); имеет угол наклона β, тангенс которого:

$$\operatorname{tg}\beta = -\frac{p_1^2}{p_2^2} = -\frac{4}{5} = -0,8.$$

Бюджетная линия стала более пологой. Вывод подкрепляется расчетами максимально доступных количеств благ.

Для первого блага:

$$z_1^{\max} = \frac{M_2}{p_1^2} = \frac{330}{4} = 82,5 \text{ (ед. блага).}$$

Для второго блага:

$$z_2^{\max} = \frac{M_1}{p_2^2} = \frac{330}{5} = 66 \text{ (ед. блага).}$$

Наблюдается поворот бюджетной линии против часовой стрелки вокруг точки начального запаса.

(в) Денежная оценка натурального дохода при изменившихся ценах: $M_3 = \overline{P_3} \cdot \overline{\Omega}$. Она составит:

$$M_3 = 5 \cdot 20 + 3 \cdot 50 = 100 + 150 = 250 \text{ (ден. ед.).}$$

То есть денежная оценка натурального дохода (начального запаса благ) снизилась.

Положение новой бюджетной линии: проходит через точку начального запаса (20; 50); имеет угол наклона γ, тангенс которого:

$$\operatorname{tg} \gamma = -\frac{p_1^3}{p_2^3} = -\frac{5}{3} \approx -1,67.$$

Бюджетная линия стала более крутой. Вывод подкрепляется расчетами максимально доступных количеств благ.

Для первого блага:

$$z_1^{\max} = \frac{M_2}{p_1^3} = \frac{250}{5} = 50 \text{ (ед. блага).}$$

Для второго блага:

$$z_2^{\max} = \frac{M_1}{p_2^3} = \frac{250}{3} \approx 83,3 \text{ (ед. блага).}$$

Наблюдается поворот бюджетной линии по часовой стрелке вокруг точки начального запаса.

Задание 6.2

Потребитель A изначально имеет натуральный доход, состав которого определяет вектор $\overline{\Omega_1} = (40; 20)$. На рынках благ сложились цены $\overline{P} = (10; 20)$.

(а) Необходимо определить денежную оценку начального запаса благ, а также максимально доступные количества первого и второго блага.

(б) Предположим, состав начального запаса потребителя изменился (рыночные цены благ остались без изменения). В новых условиях состав натурального дохода: $\overline{\Omega_2} = (40; 30)$. Какова денежная оценка нового запаса благ? Как изменилось положение бюджетной линии?

(в) Предположим, состав начального запаса потребителя изменился (рыночные цены благ остались без изменения). В новых условиях состав натурального дохода: $\overline{\Omega_3} = (30; 20)$. Какова денежная оценка нового запаса благ? Как изменилось положение бюджетной линии?

(г) Предположим, состав начального запаса потребителя изменился (рыночные цены благ остались без изменения). В новых условиях состав натурального дохода: $\overline{\Omega_4} = (20; 30)$. Какова денежная оценка нового запаса благ? Как изменилось положение бюджетной линии?

Решения и ответы

(а) Денежную оценку натурального дохода рассчитываем по формуле $M_1 = \overline{P_1} \cdot \overline{\Omega}$:

$$M_1 = 10 \cdot 40 + 20 \cdot 20 = 400 + 400 = 800 \text{ (ден. ед.)}.$$

Положение бюджетной линии: проходит через точку начального запаса (40; 20) и имеет угол наклона α, тангенс которого:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{p_1}{p_2} = -\frac{10}{20} = -0{,}5.$$

Максимально доступное количество первого блага определяет общую точку бюджетной линии с осью абсцисс и составляет:

$$z_1^{\max} = \frac{M_1}{p_1} = \frac{800}{10} = 80.$$

Максимально доступное количество второго блага определяет общую точку бюджетной линии с осью ординат и составляет:

$$z_2^{\max} = \frac{M_1}{p_2} = \frac{800}{20} = 40.$$

(б) Денежная оценка нового запаса благ рассчитывается по формуле $M_2 = \overline{P} \cdot \overline{\Omega_2}$ и составляет:

$$M_2 = 10 \cdot 40 + 20 \cdot 30 = 400 + 600 = 1\,000 \text{ (ден. ед.)}.$$

Денежная оценка нового запаса превышает денежную оценку исходного запаса благ.

Поскольку цены не изменились, новая бюджетная линия проходит через точку нового начального запаса (40; 30) и по-прежнему имеет наклон α. Наблюдается параллельный сдвиг бюджетной линии вправо, о чем свидетельствуют и возросшие максимально доступные количества первого и второго блага:

$$z_1^{\max} = \frac{M_2}{p_1} = \frac{1\,000}{10} = 100; \; z_2^{\max} = \frac{M_2}{p_2} = \frac{1\,000}{20} = 50.$$

(в) Денежную оценку изменившегося запаса благ $\overline{\Omega_3}$ рассчитаем по использованной ранее формуле: $M_3 = \overline{P} \cdot \overline{\Omega_3}$. Денежная оценка нового запаса составляет:

$$M_3 = 10 \cdot 30 + 20 \cdot 20 = 300 + 400 = 700 \text{ (ден. ед.)}.$$

Она меньше денежной оценки исходного запаса благ.

Поскольку цены не изменились, новая бюджетная линия проходит через точку нового начального запаса (30; 20) и по-прежнему имеет наклон α. Наблюдается параллельный сдвиг бюджетной линии влево, о чем свидетельствуют и сократившиеся максимально доступные количества первого и второго блага:

$$z_1^{\max} = \frac{M_3}{p_1} = \frac{700}{10} = 70; \; z_2^{\max} = \frac{M_3}{p_2} = \frac{700}{20} = 35.$$

(г) Денежную оценку изменившегося запаса благ $\overline{\Omega_4}$ рассчитаем по использованной ранее формуле: $M_4 = \overline{P} \cdot \overline{\Omega_4}$. Денежная оценка нового запаса составляет:

$$M_4 = 10 \cdot 20 + 20 \cdot 30 = 200 + 600 = 800 \text{ (ден. ед.)}$$

и в точности равна денежной оценке исходного запаса благ. Максимально доступные количества благ остались без изменений. Бюджетная линия осталась прежней, однако точка нового начального запаса сместилась по прежней бюджетной линии влево и вверх.

Задание 6.3

Потребитель N имеет участок земли, на котором выращивает картофель (x) и морковь (y). Предпочтения потребителя заданы на наборах из этих двух благ и представимы функцией полезности вида $U(x, y) = x^2 y^4$. Урожай, собранный потребителем N в году t, – 200 кг картофеля и 50 кг моркови. В году t рыночная цена картофеля составила 20 руб. за 1 кг; рыночная цена моркови – 40 руб. за 1 кг. Необходимо определить:

(а) состав оптимального набора для потребителя N;

(б) величины чистого спроса на картофель и морковь.

Решения и ответы

(а) Состав оптимального набора найдем из задачи на максимум полезности при ограничении на расходы. Функция полезности, описывающая предпочтения агента, имеет вид функции Кобба – Дугласа. Следовательно, предпочтения – стандартные: строго монотонные и строго выпуклые. Строгая выпуклость предпочтений предопределяет внутреннее решение. И это решение – единственно.

Формулируя бюджетное ограничение, учитываем строгую монотонность предпочтений агента: ограничение выписывается в виде строгого равенства. Максимальная сумма расходов агента определяется денежной оценкой натурального дохода. Рассчитаем ее величину по формуле $M = p_x\tilde{x} + p_y\tilde{y}$. Величина денежной оценки урожая: $M = 20 \cdot 200 + 40 \cdot 50 = 6\,000$ (руб.).

Выпишем задачу потребителя. Исходя из сделанных в подразделе 3.3 замечаний это – классическая оптимизационная задача вида:

$$\begin{cases} \max\limits_{x,\, y} U(x, y), \\ 6\,000 - 20x - 40y = 0, \\ x, y > 0. \end{cases}$$

Поскольку оптимум внутренний, выполняется условие оптимальности, которое имеет следствием уравнение

$$\left|MRS_{yx}^{E}\right| = \frac{p_x}{p_y}.$$

Конкретизируя это балансовое уравнение для данной задачи, получим:

$$\frac{2y^0}{4x^0} = \frac{20}{40}.$$

Следовательно, $y^0 = x^0$. Используем полученное соотношение для приведения бюджетного ограничения к виду функции с одной переменной: $6\,000 - 20 \cdot x^0 - 40 \cdot x^0 = 0$. Решив это уравнение, получим: $x^0 = 100$; $y^0 = 100$. Соответственно валовой спрос на блага: $d_x(200; 50; 20; 40) \equiv x^0 = 100$; $d_y(200; 50; 20; 40) \equiv y^0 = 100$.

Состав оптимального набора: (100; 100).

(б) Чтобы найти величины чистого спроса на картофель и морковь, необходимо сопоставить объемы валового спроса на блага и запас благ:

$$\tilde{d} = \begin{pmatrix} \tilde{d}_x \\ \tilde{d}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_x - \tilde{x} \\ d_y - \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 - 200 \\ 50 - 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -100 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, потребитель N на рынке картофеля (x) будет выступать чистым продавцом, реализуя 100 кг блага, а на рынке моркови (y) – чистым покупателем, приобретая 50 кг блага.

Чистый спрос на картофель составляет минус 100 кг; чистый спрос на морковь составляет плюс 50 кг.

Задание 6.4

Рассмотрим потребителя N из предыдущей задачи, имеющего начальный запас благ (200; 50) и предпочтения, представимые функцией полезности вида $U(x, y) = x^2 y^4$. Изначально потребитель действовал в ценовых условиях $\overline{P_1} = (20; 40)$ и формировал оптимальный набор: $\overline{E_1} = (100; 100)$. Конъюнктура рынка картофеля изменилась так, что цена картофеля (благо x) снизилась до уровня 5 руб. за 1 кг. Определите общий эффект от изменения цены блага x для валового и чистого спроса потребителя.

Решение и ответ

Поскольку начальный оптимум, объемы валового и чистого спроса на блага известны, задача сводится к поиску нового равновесия и расчетам, позволяющим оценить изменения в валовом и чистом спросе потребителя на блага.

Состав нового оптимального набора найдем из задачи на максимум полезности при ограничении на расходы. Максимальная сумма расходов агента определяется денежной оценкой натурального дохода. Рассчитаем ее величину по формуле $M_2 = p_x^2 \tilde{x} + p_y \tilde{y}$. Получим: $M_2 = 5 \cdot 200 + 40 \cdot 50 = 3\,000$ (руб.).

Выпишем задачу потребителя:

$$\begin{cases} \max\limits_{x,\, y} U(x, y), \\ 3\,000 - 5x - 40y = 0, \\ x, y > 0. \end{cases}$$

Поскольку оптимум внутренний, выполняется условие оптимальности, которое имеет следствием уравнение

$$\left|MRS_{yx}^{E}\right| = \frac{p_x}{p_y}.$$

Конкретизируя это балансовое уравнение для данной задачи, получим:

$$\frac{2y^0}{4x^0} = \frac{5}{40}.$$

Тогда

$$y^0 = \frac{1}{4}x^0.$$

Подставив это соотношение в бюджетное ограничение, получим уравнение с одной переменной вида:

$$3\,000 - 5x^0 - 40\left(\frac{1}{4}x^0\right) = 0.$$

Получим: $x^0 = 200$; $y^0 = 50$. То есть состав нового оптимального набора (200; 50). Новый оптимум совпадает с исходным запасом благ; объем валового спроса на блага равен имеющимся у агента запасам благ: $d_x(200; 50; 5; 40) \equiv \tilde{x} = 200$; $d_y(200; 50; 5; 40) \equiv \tilde{y} = 50$. Изменения в валовом спросе:

$$\Delta\overline{d} = \begin{pmatrix} 200 \\ 50 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ -50 \end{pmatrix}.$$

Совпадение нового оптимума и начального запаса означает, что агент не нуждается в рыночных трансакциях для максимизации полезности. Следовательно, чистый спрос на блага равен нулю. Тогда изменения в чистом спросе составят:

$$\Delta\overline{\overline{d}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -100 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ -50 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, состав оптимального набора (200; 50).

Изменение валового спроса:

$$\Delta\overline{d} = \begin{pmatrix} 100 \\ -50 \end{pmatrix}.$$

Изменение чистого спроса:

$$\Delta\overline{\tilde{d}} = \begin{pmatrix} 100 \\ -50 \end{pmatrix}.$$

Задание 6.5

Предпочтения потребителя K заданы на наборах из двух благ, a и b, и представимы функцией полезности вида $U(a,b)=a^2b$. Потребитель имеет начальный запас благ (100; 100) и принимает решения в ценовых условиях $\overline{P_1} = (10; 5)$.

(а) Необходимо найти состав оптимального набора.

(б) Какой набор сформирует данный агент, если цена блага b увеличится в 4 раза?

(в) Каков общий эффект от повышения цены блага b? Каковы величины эффектов, обусловивших изменения в спросе, в контексте подхода Слуцкого?

Решения и ответы

(а) Ставим и решаем задачу на максимум полезности при ограничении на расходы. Величина расходов определяется денежной оценкой начального запаса при ценах $\overline{P_1}$: $M_1 = p_a\tilde{a} + p_b^1\tilde{b}$. Денежная оценка исходного запаса составляет:

$$M_1 = 10 \cdot 100 + 5 \cdot 100 = 1\,500 \text{ (ден. ед.)}.$$

Задача потребителя имеет вид:

$$\begin{cases} \max\limits_{a,\,b} U(a,b), \\ 1\,500 - 10a - 5b = 0, \\ a, b > 0. \end{cases}$$

Воспользуемся для поиска состава набора маршаллианскими функциями спроса вида (5.20). Получим:

$$d_a \equiv a^0 = \frac{2}{2+1} \cdot \frac{1\,500}{10} = 100; \;\; d_b \equiv b^0 = \frac{1}{2+1} \cdot \frac{1\,500}{5} = 100.$$

Таким образом, состав начального оптимального набора:

$$\overline{E_1} = (100; 100).$$

Состав оптимального набора: $\overline{E_1} = (100; 100)$.

(б) Ставим и решаем задачу на максимум полезности при ограничении на расходы. Величина расходов определяется денежной оценкой начального запаса при ценах $\overline{P_2}$ и составляет:

$$M_2 = 10 \cdot 100 + 20 \cdot 100 = 3\,000 \text{ (ден. ед.)}.$$

Задача потребителя имеет вид:

$$\begin{cases} \max\limits_{a,\, b} U(a, b), \\ 3\,000 - 10a - 20b = 0, \\ a, b > 0. \end{cases}$$

Используя маршаллианские функции спроса вида (5.20), найдем состав нового оптимального набора:

$$d_a^2 \equiv a_2^0 = \frac{2}{2+1} \cdot \frac{3\,000}{10} = 200; \;\; d_b^2 \equiv b_2^0 = \frac{1}{2+1} \cdot \frac{3\,000}{20} = 50.$$

Таким образом, состав нового оптимального набора:

$$\overline{E_2} = (200; 50).$$

(в) Общий эффект от увеличения цены блага b можно получить посредством вычитания из координат точки нового оптимума $\overline{E_2}$ координат точки исходного оптимума $\overline{E_1}$. Получим:

$$\overline{TE} = \begin{pmatrix} 200 \\ 50 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ -50 \end{pmatrix}.$$

Алгоритм декомпозиции в случае натурального дохода детально описан в подразделе 6.3. Часть этапов алгоритма уже реализована. Найдем состав двух промежуточных оптимальных наборов [этапы 3, 4 и соответствующие им задачи, для решения которых используем формулы (6.16), (6.17) и маршаллианские функции спроса (5.20)].

Определение состава промежуточного набора, являющегося результатом реализации эффекта субституции, основано на решении задачи на максимум полезности при ограничении на расходы, M_C^S. Величина компенсированного по Слуцкому бюджета определяем по формуле $M_C^S = p_a \cdot a_1^0 + p_b^2 \cdot b_1^0$. Компенсированный по Слуцкому бюджет составляет: M_C^S = 3 000 ден. ед. Определим состав набора:

$$\overline{E_3^S} = \overline{F}\left(3\,000; 10; 20\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{2+1} \cdot \dfrac{3\,000}{10} \\ \dfrac{1}{2+1} \cdot \dfrac{3\,000}{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

Определение состава промежуточного набора, сформированного в новых ценовых условиях при уровне расходов, равных начальной денежной оценке натурального дохода, также основано на решении задачи на максимум полезности. Состав данного набора:

$$\overline{E_4} = \overline{F}\left(1\,500; 10; 20\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{2+1} \cdot \dfrac{1\,500}{10} \\ \dfrac{1}{2+1} \cdot \dfrac{1\,500}{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

Рассчитаем величину эффекта субституции (из координат точки $\overline{E_3^S}$ вычитаются координаты точки $\overline{E_1}$):

$$\overline{SE} = \begin{pmatrix} 200 \\ 50 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ -50 \end{pmatrix}.$$

Теперь определим величину «обычного» эффекта дохода – из координат точки $\overline{E_4}$ вычтем координаты точки $\overline{E_3^S}$:

$$\overline{IE} = \begin{pmatrix} 100 \\ 25 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 200 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -100 \\ -25 \end{pmatrix}.$$

Для определения величины эффекта начального запаса из координат точки $\overline{E_2}$ вычтем координаты точки $\overline{E_4}$:

$$\overline{EIE} = \begin{pmatrix} 200 \\ 50 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 100 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

Все полученные данные занесем в таблицу ответов и проверим «баланс» – по каждому благу сумма величин трех эффектов должна быть равна общему эффекту от изменения цены.

Эффект	Реализация эффекта	Δa	Δb
TE	$E_1 \to E_2$	100	–50
SE	$E_1 \to E_3^S$	100	–50
IE	$E_3^S \to E_4$	–100	–25
EIE	$E_4 \to E_2$	100	25

Расчеты произведены верно, поскольку по каждому благу наблюдается: $TE = SE + IE + EIE$.

Величины общего эффекта от увеличения цены блага b, эффекта субституции, эффекта дохода и эффекта начального запаса представлены в помещенной выше таблице.

7. ОЦЕНКА ИЗМЕНЕНИЙ В БЛАГОСОСТОЯНИИ ПОТРЕБИТЕЛЯ

Анализ последствий повышения цены хотя бы одного из благ, включаемых потребителем в набор, обусловливает отрицательный общий эффект для потребления данного блага. В целом оптимальный набор при повышении цены обладает меньшей полезностью, чем исходный, точка оптимума смещается на ниже лежащую кривую безразличия. Это означает снижение уровня удовлетворения потребностей, а значит, и снижение благосостояния потребителя.

Методам оценки изменений в благосостоянии и посвящена данная глава. Изменения в благосостоянии могут быть и положительными, и отрицательными. Возможны такие изменения в ценах, эффекты от которых компенсируют друг друга, вследствие чего уровень благосостояния не меняется.

Денежная оценка изменений в благосостоянии дается с помощью исчисления:

- компенсирующей вариации дохода;
- эквивалентной вариации дохода;
- величины потерь в выигрыше потребителя.

Направление изменения благосостояния можно получить на основе формализации выявленных предпочтений, через изменения индекса реального дохода и через соотношение индекса расходов и ценовых индексов.

Практическая значимость оценки изменений в благосостоянии обусловлена реализацией государственной политики, направленной на поддержку социально незащищенных слоев населения. Получатели трансфертов, лица с низкими фиксированными доходами, многодетные семьи и другие категории граждан могут получать от государства компенсационные выплаты или натуральные субсидии в условиях повышения цен на отдельные категории товаров. Правительственные органы, оценив изменения в благосостоянии домашних хозяйств, могут прибегнуть к непосредственному ограничению потребительских цен. Ниже рассматриваются возможные методы, на основе которых государство принимает решения социально-экономического характера.

7.1. Компенсирующая и эквивалентная вариации дохода

Компенсирующая вариация дохода (CV) – величина, на которую необходимо изменить доход агента, чтобы сохранить его реальный доход неизменным.

В рамках подхода Слуцкого это означает возможность приобретения исходного оптимального набора в новых ценовых условиях. Величина компенсированного дохода (бюджета) – B_c – определяется как сумма денег, необходимая для приобретения исходного набора в новых ценовых условиях. Таким образом, величина CV определяется как разница между суммой денег, необходимой для приобретения старого набора при новых ценах, за вычетом начальной суммы денег (исходного бюджета агента):

$$CV^S = B_C^S - B_0. \tag{7.1}$$

В рамках подхода Хикса величина компенсирующей вариации дохода определяется исходя из суммы денег, необходимой для приобретения набора, ранее названного как промежуточный хиксианский набор. Потребитель должен иметь возможность сохранить уровень удовлетворения потребности неизменным. По Хиксу компенсирующая вариация дохода в ситуации повышения цены первого блага будет рассчитываться по формуле

$$CV^H = B_C^H - B_0 = [p_1^2 \cdot h_1\left(U^*, p_1^2, p_2\right) + p_2 \cdot h_2(U^*, p_1^2, p_2)] - B_0. \tag{7.2}$$

Эквивалентная вариация дохода (EV) – величина дохода, которой агент готов пожертвовать, чтобы сохранить цены неизменными.

Рассматривается эквивалентная вариация дохода исходя из величины реального дохода, который агент имеет при формировании нового оптимума, и определяется как модуль разницы между эквивалентным доходом и той суммой, которой располагает агент, т. е. начальным бюджетом:

$$EV = \left|B_E - B_0\right|. \tag{7.3}$$

Величины эквивалентного дохода будут определяться по-разному в рамках подхода Слуцкого и подхода Хикса.

По Слуцкому эквивалентный доход (бюджет) – B_E – сумма денег, необходимая для приобретения нового оптимального набора (E_2) при исходных ценах. Тогда эквивалентный доход можно определить как

$$B_E^S = p_1^1 \cdot z_1^2 + p_2 \cdot z_2^2. \tag{7.4}$$

По Хиксу эквивалентный доход – та сумма денег, которая позволит сформировать набор с полезностью $U^{**} = U(z_1^2, z_2^2)$ при начальных ценах. Величину эквивалентного дохода по Хиксу можно рассчитать по формуле

$$B_E^H = p_1^1 h_1\left(U^{**}, p_1^2, p_2\right) + p_2 h_2\left(U^{**}, p_1^2, p_2\right). \tag{7.5}$$

На рис. 7.1 представлена графическая интерпретация эквивалентного и компенсирующего доходов, рассчитанных в рамках подхода Слуцкого. Для обеспечения возможности отображения величин CV и EV используется система координат «количество блага x – количество агрегированного блага (расходы на прочие блага)». Наклон бюджетных линий, отражающих структуру исходной системы цен, – α; наклон бюджетных линий в новых ценовых условиях – β.

Эквивалентный доход и компенсирующий доход, рассчитанные в рамках подхода Хикса, представлены на рис. 7.2. Обозначение углов наклона бюджетных линий и точек оптимума аналогично их представлению на рис. 7.1. Отличия в определении величин компенсирующей и эквивалентной вариаций дохода по Слуцкому и по Хиксу состоят в том, что в первом случае линии компенсированного и эквивалентного дохода пересекают кривые безразличия в точках оптимума, а во втором являются касательными к кривым безразличия, содержащим точки исходного и нового оптимумов.

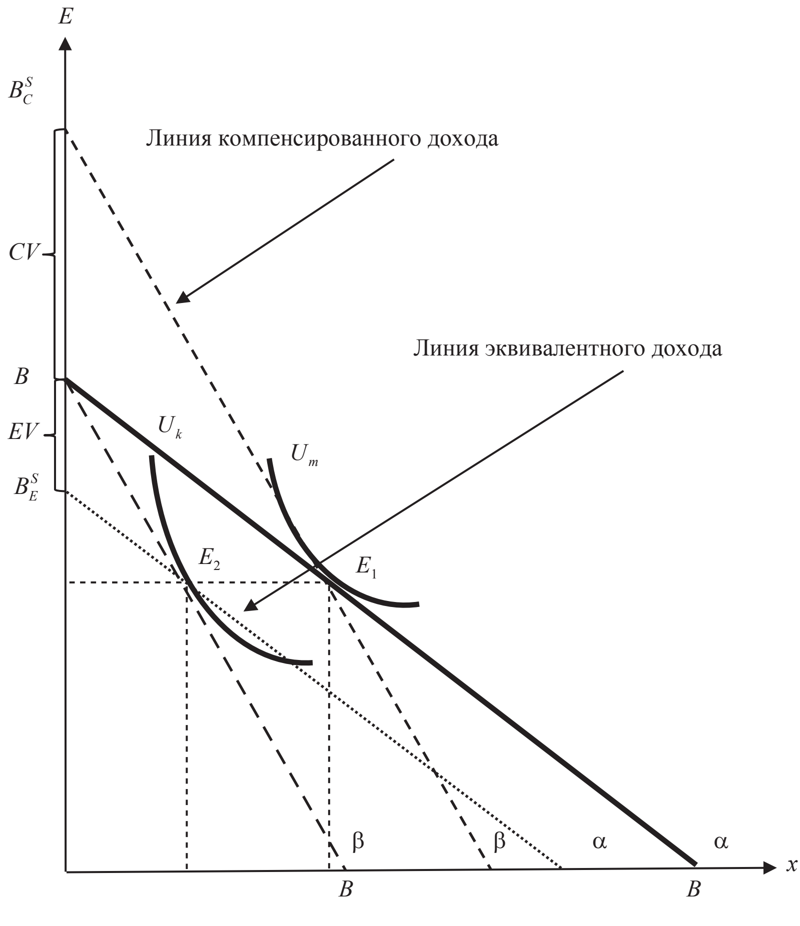

Рис. 7.1. Компенсированный и эквивалентный доход по Слуцкому

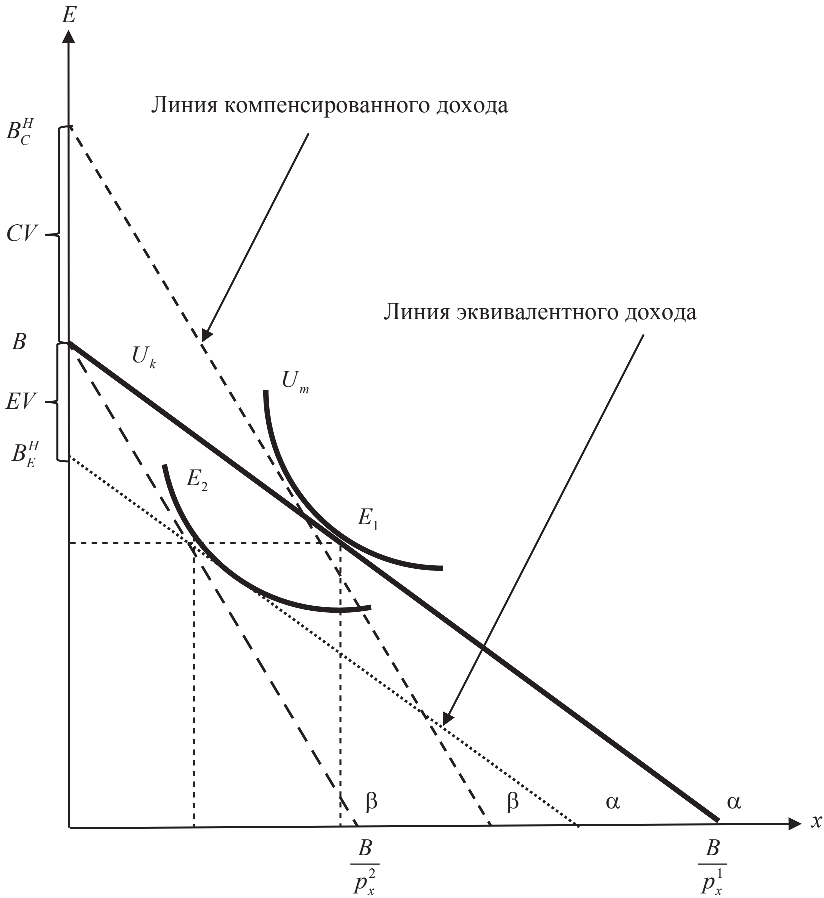

Рис. 7.2. Компенсированный и эквивалентный доход по Хиксу

С целью компенсации потерь в благосостоянии, обусловленных повышением цен потребительских благ, для получателей фиксированных доходов определяются *коэффициенты индексации*.

Индексация доходов призвана минимизировать потери в благосостоянии, сохраняя реальный доход на неизменном уровне. Индексация, обеспечивающая неизменный реальный доход как неизменную покупательную способность, базируется на подходе Слуцкого. Однако благосостояние (полезность формируемого набора) в этом случае оказывается выше, чем до повышения цен. Преимуществом подхода Слуцкого является простота в применении.

Индексация, обеспечивающая неизменный реальный доход как неизменный уровень удовлетворения потребностей (полезности), базируется на подходе Хикса. Этот подход на практике применить не удается, поскольку не существует объективных методов получения функций хиксианского спроса.

Различают два вида коэффициентов индексации.

Один (i_1) показывает, на сколько процентов необходимо увеличить доход соответствующему агенту:

$$i_1 = \frac{B_C - B_0}{B_0} \cdot 100\ \%. \tag{7.6}$$

Второй (i_2) показывает, во сколько раз должен измениться фиксированный номинальный доход агента:

$$i_2 = \frac{B_C}{B_0}. \tag{7.7}$$

Связь между рассмотренными коэффициентами индексации может быть представлена следующим образом:

$$i_1 = (i_2 - 1) \cdot 100\ \%. \tag{7.8}$$

7.2. Изменения в выигрыше потребителя

Еще одним способом оценки изменений в благосостоянии является определение изменений в выигрыше покупателей (ΔCS).

Рассмотрим понятия, характеризующие выигрыш потребителя, приобретающего благо X в объеме x_1. Различают понятия «валовой выигрыш потребителя» (*total consumer's surplus*[42] –

[42] Термин *surplus* может переводиться как «выигрыш», «излишек», «избыток», «рента», в зависимости от предпочтений переводчика.

$TCS(x_1)$) и «чистый выигрыш потребителя» (*net consumer's surplus* – $NCS(x_1)$). Валовой выигрыш потребителя представляет собой денежный эквивалент полезности, полученной от использования блага в определенном объеме. Чистый выигрыш потребителя – денежный эквивалент полезности от потребления блага за вычетом расходов на его приобретение или неоплаченная часть полученного удовольствия (денежная оценка чистого удовольствия от потребления).

Под выигрышем потребителя (*consumer's surplus* – CS) понимают именно чистый выигрыш (NCS), т. е. $NCS(x_1) \equiv CS(x_1)$.

Валовой и чистый выигрыши потребителя от использования блага X в объеме x_1 связаны соотношением

$$CS(x_1) = TCS(x_1) - p_x \cdot x_1. \tag{7.9}$$

Поскольку выигрыш потребителя «улавливается» через рыночные трансакции, а на рынке потребительских благ агент является покупателем, термин *consumer's surplus* часто переводят как *выигрыш покупателя.* Для определения изменения выигрыша в случае изменения цены блага необходимо рассмотреть алгоритм расчета величины валового и чистого выигрышей. В основе определения денежного эквивалента получаемой от потребления полезности лежит функция общей ценности блага.

Из рассмотренных ранее условий оптимальности набора благ для прямой (3.16) и двойственной (5.18) задач следует, что в оптимуме агент будет предъявлять спрос на благо X в объеме, определяемом соотношением

$$\frac{MU_X^0(x^0)}{p_X} = \lambda^0 = \frac{1}{\mu^0}. \tag{7.10}$$

Из соотношения (7.10) можно получить функцию предельной ценности блага (*marginal value* – MV) как денежного эквивалента предельной полезности:

$$MV_X(x) \equiv p_x^d = \frac{MU_X^0(x^0)}{\lambda^0}. \tag{7.11}$$

Функция предельной ценности является обратной функций спроса на благо. Графически это та же линия, которая отображает функцию спроса.

Общая ценность блага (*total value* – *TV*) в объеме x^0 – $TV_x(x^0)$ является общим выигрышем потребителя, денежной оценкой удовольствия от потребления или полезности блага X в объеме x^0. Для определения величины $TV_x(x^0)$ воспользуемся формулой

$$TV_X\left(x^0\right)=\int_0^{x^0} MV_X\left(x\right)dx. \tag{7.12}$$

Из формулы (7.12) следует, что TV – площадь фигуры, расположенной под линией спроса в интервале объема от нуля до объема спроса, предъявляемого при действующей на рынке цене блага X. Рассчитывая чистый выигрыш потребителя, из $TV \equiv TCS$ необходимо вычесть сумму расходов на приобретение блага. Тогда чистый выигрыш потребителя – площадь геометрической фигуры, ограниченной осью ординат, линией действующей на рынке цены и линией спроса. При изменении цены блага происходит изменение объема спроса. Тогда изменение выигрыша потребителя будет представлять собой разницу между величинами чистого выигрыша в новых ценовых условиях и в исходных ценовых условиях:

$$\Delta CS = CS\left(x(p_2)\right)-CS\left(x(p_1)\right)\equiv CS(x_2)-CS(x_1). \tag{7.13}$$

Величина изменения выигрыша потребителя при увеличении цены блага с p_1 до p_2 показана на рис. 7.3. Выигрыш потребителя при цене p_1 определялся объемом потребления x_1 и составлял сумму бо́льшую, нежели в условиях, когда цена достигла уровня p_2, а объем потребления сократился до x_2. Таким образом, ΔCS при увеличении цены блага – величина отрицательная, что свидетельствует о снижении благосостояния агента.

Произошедшие изменения в благосостоянии объясняются необходимостью платить больше за каждую приобретаемую единицу (потери в выигрыше вследствие переплаты) и сокращением объемов потребления.

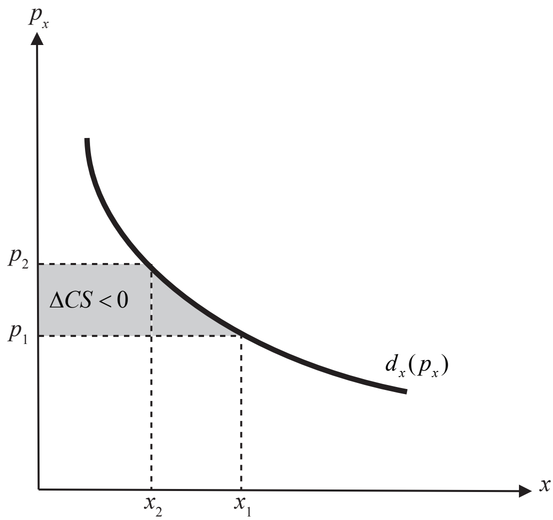

Рис. 7.3. Изменение выигрыша потребителя
при увеличении цены блага

Второй выделенный компонент потерь в выигрыше называют «мертвым грузом» потребителя (*deadweight loss* – DWL^c), он представляет собой часть чистых потерь экономики, возникающих при ухудшении рыночной конъюнктуры по тем или иным причинам.

7.3. Теория выявленных предпочтений и применение индексов для оценки изменений в благосостоянии

7.3.1. Теория выявленных предпочтений: аксиоматика и основные результаты

В реальной жизни не известны ни предпочтения в явном виде, ни – тем более – функция полезности агента. Однако любой потребитель предъявляет спрос на рынках благ и формирует потребительский набор. Если исходить из рациональности действий агента, то формируемый набор является для него наилучшим из доступных. Многократные наблюдения за рыночным поведением агента позволяют получить представление о его предпочтениях, лежащих в основе выбора. Таким образом, предпочтения потребителя можно выявить. Данный подход к анализу поведения потребителя был предложен Полом Энтони Самуэльсоном[43]. Подход получил название *теория выявленных предпочтений (revealed preferences theory).* По сути, данный подход – теория спроса[44], основанная исключительно на наблюдениях за реакцией покупателей на изменения цен и дохода (бюджета). Речь идет о выборе[45], а не о предпочтениях. Однако в основе спроса лежат предпочтения. Рассмотрим подробнее терминологию, аксиоматику и основные положения данной концепции[46].

Предъявляя спрос на набор $A\left[\overline{A} \equiv D = \overline{F}\left(B, \overline{P}\right)\right]$, агент выявляет свои предпочтения по отношению к данному набору при сложившихся ценах и бюджете. Спрос мог быть предъявлен на любой доступный при данном бюджетном ограничении набор, однако выбран именно набор A. Следовательно, набор A выявленно предпочитается прочим доступным наборам.

В ы я в л е н н о е   п р е д п о ч т е н и е – это отношение между товарным набором, на который предъявлен спрос при ценах $\overline{P}$ и бюджете B, и товарными наборами, на которые мог быть предъявлен спрос в этих условиях.

---

[43] См.: *Samuelson P. A.* A Note on the Pure Theory of Consumers' Behaviour // Economica. 1938. Vol. 5, № 17. P. 61–71; *Его же.* Consumption Theory in Terms of Revealed Preference // Economica. 1948. Vol. 60, № 15. P. 243–253.

[44] П. Э. Самуэльсон предложил исключить из анализа и функцию полезности, и кривые безразличия вследствие невозможности определения уровня полезности (достигнутого удовлетворения) или порядка предпочтений. Можно наблюдать за выбором потребителя, анализируя спрос, предъявляемый им на определенный набор благ: $D = \overline{F}(B, \overline{P})$.

[45] Концепция выявленных предпочтений подвергалась критике по следующим позициям: избыточный эмпиризм; независимость выбора потребителя от относительных цен; нерациональность выбора потребителя.

[46] Достаточно простое и подробное изложение материала содержится в учебнике Х. Р. Вэриана «Микроэкономика. Промежуточный уровень. Современный подход» (М. : ЮНИТИ, 1997. С. 138–156).

Теория выявленных предпочтений строится на ряде важных предпосылок:

– поведение агента рационально: совершая выбор, агент максимизирует свое благосостояние, т. е. является оптимизатором;
– предпочтения агента строго выпуклы, т. е. при любых заданных бюджете и ценах существует единственный набор, на который предъявляется спрос;
– потребитель действует в соответствии с определенными критериями поведения (выбора).

В качестве критериев выбора рассматриваются:

– логичность (или устойчивость предпочтений);
– транзитивность;
– ненасыщаемость;
– гомотетичность (неизменность структуры набора).

Логичность выбора, или устойчивость предпочтений, означает, что при прочих равных условиях (бюджете и ценах) всегда выбирается набор *A*; выбор будет иным только при изменении цен и/или бюджета.

Транзитивность выбора: если из пары наборов А и *K* агент предпочитает набор *A*, а из пары наборов *K* и *C* – набор *K*, то из пары *A* и *C* он предпочтет набор *A*.

Ненасыщаемость: строго предпочтительнее те наборы, которые содержат не меньше всего благ в сравнении с определенным набором.

Гомотетичность: используется в качестве дополнительного критерия выбора в ряде случаев и означает неизменность структуры предпочтений. Выявляя предпочтения по отношению к составу набора, агент выявляет предпочтения и по отношению к его структуре.

Выделяют прямо выявленные предпочтения (*direct revealed preference – DRP*) и косвенно выявленные предпочтения (*indirect revealed preference – IRP*). Прямо выявленное предпочтение отображается с помощью знаков $\underset{\rightarrow}{\succ}$ или $\overset{DRP}{\succ}$. Косвенно выявленное предпочтение обозначается с помощью знаков $\underset{\leftarrow}{\succ}$ или $\overset{IRP}{\succ}$.

Набор A прямо выявленно предпочитается набору C, если существуют цены $\left(\overline{P_1}\right)$ и бюджет (B) такие, что

$$\overline{A} = F\left(\overline{P_1}, B\right) \text{ и } \overline{P_1} \cdot \overline{C} \leq B.$$

Если набор A прямо выявленно предпочитается набору C, то набор *A фактически предпочитается* набору C. Прямо выявленные предпочтения определяются при непосредственном сравнении наборов. Косвенно выявленные предпочтения определяются опосредованно, на основе критерия поведения «транзитивность»: если набор A прямо выявленно предпочитается набору C, а набор C прямо выявленно предпочитается набору L, то набор A косвенно выявленно предпочитается набору L. Набор *A выявленно предпочитается* набору L, если он прямо или косвенно выявленно предпочитается набору L.

Если набор выбирается среди прочих доступных, он выявленно предпочитается этим наборам. Система предпочтений отвечает определенным аксиоматически заданным свойствам. В теории выявленных предпочтений приняты сильная и слабая аксиомы, позволяющие согласовать наблюдаемый выбор с теорией потребительского поведения, основанной на заданных предпочтениях и максимизации полезности набора. Наряду с ранее рассмотренными критериями выбора аксиоматика теории выявленных предпочтений также включает две основные аксиомы: слабую аксиому – *WARP* (для прямо выявленных предпочтений) и сильную аксиому – *SARP* (для прямо и косвенно выявленных предпочтений).

Слабая аксиома выявленных предпочтений (*weak axiot of revealed preferences – WARP*): если набор A прямо выявленно предпочитается набору C и рассматриваемые наборы нетождественны, то не может быть так, что набор C прямо выявленно предпочитается набору A. Набор C может быть выбран только в изменившихся условиях, когда набор A недоступен. Если ранее агент предпочитал набор A набору C, а в новых ценовых условиях при доступности набора A выбирает набор C, это свидетельствует о нарушении *WARP*.

Нарушения *WARP* возможны в следующих случаях:

1) потребитель поступил нерационально, приобретя набор *A* (*A* не является лучшим, имеющим максимальную полезность набором);
2) потребитель поступил нерационально, в новых условиях приобретя набор *C* (полезность других доступных наборов была выше; например, полезность набора *A*);
3) потребитель поступил нерационально в обоих случаях;
4) вместе с изменением бюджетного ограничения произошло изменение системы вкусов и предпочтений агента, т. е. изменилась оценка полезности наборов *A* и *C*.

Сильная аксиома выявленных предпочтений (*strong axiot of revealed preferences – SARP*): если набор *A* выявленно предпочитается набору *M* (прямо или косвенно) и наборы *A* и *M* – нетождественны, то набор *M* не может прямо или косвенно предпочитаться набору *A*.

Сильная аксиома выявленных предпочтений «усиливает» слабую аксиому, включая косвенно выявленные предпочтения; непосредственно вытекает из слабой аксиомы выявленных предпочтений и из аксиоматически заданного критерия выбора «транзитивность». Содержательно *SARP* включает *WARP*. Иначе: для рационального потребителя не должно наблюдаться цепочки выбора, когда набор *M* предпочитается набору *A*.

Сильная аксиома выявленных предпочтений является необходимым следствием поведения, оптимизирующего выбор[47]; достаточным условием поведения, оптимизирующего выбор; необходимым и достаточным условием совместимости наблюдаемого выбора и экономической модели поведения потребителя, основанной на заданных предпочтениях.

Выбор, согласующийся с принципом максимизации полезности, таков: если при ценах $\overline{P_1}$ и бюджете *B* выбирается набор *A* при

[47] Ключевым вопросом остается следующий: является ли агент оптимизатором, т. е. максимизирует ли он полезность набора, совершая выбор? Легко доказать, что выбор, противоречащий оптимизаторскому поведению, демонстрирует нарушение *WARP*.

условии доступности набора C, а при ценах $\overline{P_2}$ и бюджете B выбирается набор C, то набор A в этих условиях недоступен. То есть если $\overline{P_1} \cdot \overline{A} = B$, $\overline{P_1} \cdot \overline{C} \leq B$ и $\overline{P_2} \cdot \overline{C} = B \Rightarrow \overline{P_2} \cdot \overline{A} > B$.

Поскольку предпочтения потребителя неизвестны, необходимо их реконструировать (выявить) в процессе наблюдения за выбором потребителя. Система предпочтений реконструируется[48] на основе прямо и косвенно выявленных предпочтений с учетом принятых предпосылок и выполнения *WARP* и *SARP*.

Наблюдая за рыночным поведением агента, можно получить представление о его предпочтениях – реконструировать кривые безразличия, а затем, на следующем этапе, подобрать функцию полезности, которая формально представляет эти предпочтения. При первичном наблюдении, на основе аксиоматически заданного свойства монотонности (ненасыщаемости) выявленных предпочтений, можно определить множество наборов, по отношению к которым данный набор – менее предпочтителен. Наборы, доступные одновременно с набором A, – менее предпочтительны. Таким образом, производится «первичное отсечение» тех подмножеств наборов, которые не могут находиться на кривой безразличия, содержащей набор A. Последовательно наблюдая за выбором потребителя в изменяющихся ценовых условиях, можно сузить зону поиска наборов, расположенных на той же кривой безразличия, что и набор A, и полностью реконструировать кривую безразличия U_A. Далее можно построить всю карту безразличия и описать предпочтения агента с помощью функции полезности.

Наблюдения за выбором потребителя, в соответствии с положениями теории выявленных предпочтений, позволяют получить представление о динамике спроса: для нормальных товаров линия спроса имеет отрицательный наклон. То есть даже без непосредственного использования функции полезности и кривых безразличия можно получить основные выводы теории потребительского выбора.

[48] Алгоритм реконструкции напоминает действия скульптора, отсекающего от глыбы мрамора лишние куски.

Характеризуя теорию выявленных предпочтений (ТВП), выделим ее недостатки и преимущества. Критический анализ ТВП строится на ее излишнем эмпиризме.

Слабыми сторонами теории выявленных предпочтений являются следующие позиции:

– аналитический аппарат ТВП позволяет проводить только качественный анализ;
– на основе ТВП определяется общее направление действия эффекта, обусловленного изменением относительных цен, и формулируется закон спроса в общем виде;
– невозможно получить функцию спроса от цены.

Сильные стороны теории выявленных предпочтений состоят в том, что:

– без использования сложного аппарата и нетестируемой на практике функции полезности можно получить основные качественные выводы теории потребительского поведения;
– существует возможность реконструирования кривых безразличия и, следовательно, предпочтений;
– имеется самостоятельная область применения результатов – оценка изменений в благосостоянии потребителя.

7.3.2. Индексы номинального дохода, ценовые и количественные индексы: применение для оценки изменений в благосостоянии

Оценка изменений в благосостоянии потребителей на основе концепции выявленных предпочтений (КВП) предполагает формализацию выявленных предпочтений, в том числе *WARP*. Формализация КВП и ее применение для оценки благосостояния агентов и его изменений осуществляется на основе теории индексов.

Для простоты будем рассматривать различные наборы $\overline{Z}$, состоящие из товаров двух видов: q_1, q_2. Пусть при исходных ценах $\overline{P_1} = \left(p_1^1,\ p_2^1\right)$ приобретался набор $\overline{Z_1} = \left(q_1^1,\ q_2^1\right)$. Тогда бюджетное ограничение агента имеет вид:

$$B-\left(p_1^1\cdot q_1^1+p_2^1\cdot q_2^1\right)\geq 0. \qquad (7.14)$$

Предположим, набор $\overline{Z_1}$ прямо выявленно предпочитался доступному при данном бюджетном ограничении набору $\overline{Z_2}$, тогда

$$B-\left(p_1^1\cdot q_1^2+p_2^1\cdot q_2^2\right)\geq 0. \qquad (7.15)$$

Следовательно,

$$p_1^1\cdot q_1^1+p_2^1\cdot q_2^1\geq p_1^1\cdot q_1^2+p_2^1\cdot q_2^2. \qquad (7.16)$$

Формализация WARP состоит в следующем: если потребитель приобретает набор $\overline{Z_2}$ при ценах $\overline{P_1}=\left(p_1^2,\, p_2^2\right)$, тогда набор $\overline{Z_1}$ в новых ценовых условиях недоступен. Соотношение (7.16) при новых ценах примет вид:

$$p_1^2\cdot q_1^1+p_2^2\cdot q_2^1>p_1^2\cdot q_1^2+p_2^2\cdot q_2^2. \qquad (7.17)$$

Обобщая полученный результат для наборов из n благ, получаем следующее: если при ценах $\overline{P_1}$ потребителю доступны наборы $\overline{Z_1}$ и $\overline{Z_2}$, а при ценах $\overline{P_2}$ он выбирает набор $\overline{Z_2}$, это означает *недоступность* набора $\overline{Z_1}$ при ценах $\overline{P_2}$. То есть выполняются соотношения (7.18) – (7.20):

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} p_i^1 q_i^1 = B \geq \sum\nolimits_{i=1}^{n} p_i^1 q_i^2; \qquad (7.18)$$

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} p_i^2 q_i^1 > \sum\nolimits_{i=1}^{n} p_i^2 q_i^2; \qquad (7.19)$$

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} p_i^2 q_i^1 > B. \qquad (7.20)$$

Оценка изменений в благосостоянии потребителя (ΔW) на основе анализа выявленных предпочтений предполагает анализ соотношения текущего и базового уровней потребления через оценку формируемых наборов. Текущее состояние (в период времени t) агента определяет набор $\overline{Q^t}$, сформированный им при действующих ценах $\overline{P^t}$ и текущем уровне дохода M^t. Базовое состояние (в период времени 1) определяет набор $\overline{Q^1}$, сформированный им при действующих ценах $\overline{P^1}$ и текущем уровне дохода M^1. Изменение цен и/или дохода предопределяет возможные изменения в благосостоянии. Благосостояние потребителя может не измениться вследствие произошедших изменений (например, при одновременном и пропорциональном изменении и цен, и дохода); может снизиться; может возрасти. Анализ выявленных предпочтений в большинстве случаев позволяет оценить произошедшие изменения. Однако в некоторых случаях однозначного ответа может и не быть.

Благосостояние агента определенно вырастет, если при доступности базового набора выбирается набор текущего периода. Будучи рациональным, потребитель не станет поступать себе во вред. Тогда выполняется соотношение

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^t q_i^t \geq \sum_{i=1}^{n} p_i^t q_i^1. \qquad (7.21)$$

Благосостояние агента определенно снизится, если набор текущего периода был доступен в базовом периоде, но не выбирался потребителем. Переход к менее предпочтительному набору означает снижение благосостояния. Логично исходить из того, что набор базового периода в текущих ценах недоступен. Тогда должно выполняться соотношение

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^1 q_i^t \leq \sum_{i=1}^{n} p_i^1 q_i^1. \qquad (7.22)$$

Однозначно определить изменение благосостояния агента невозможно, если набор текущего периода не был доступен в базовом периоде, а базовый набор недоступен при текущих ценах и номинальном доходе. В этом случае нет возможности произвести прямое сравнение наборов. Оценить изменения в благосостоянии агента нельзя, если выполняются условия (7.23) и (7.24).

Условие недоступности базового набора в текущем периоде:

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} p_i^t q_i^1 > \sum\nolimits_{i=1}^{n} p_i^t q_i^t. \tag{7.23}$$

Условие недоступности текущего набора в базовом периоде:

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} p_i^1 q_i^t > \sum\nolimits_{i=1}^{n} p_i^1 q_i^1. \tag{7.24}$$

Формализация выявленных предпочтений предполагает активное использование индексов: номинального дохода; количественных и ценовых индексов, рассчитываемых по разным методикам – Пааше, Ласпейреса, Фишера. Методики Пааше и Ласпейреса различаются весами, с которыми количество блага (или цена) включаются в индекс. Индекс Фишера (F) рассчитывается на основе индексов Пааше (P) и Ласпейреса (L) по формуле

$$F = \sqrt{P \cdot L}. \tag{7.25}$$

Индексы Фишера (и количественный, и ценовой) позволяют уловить преимущества и элиминировать недостатки каждого принятого для расчета индекса.

Индекс номинального дохода (индекс расходов) можно рассчитать единственным способом, соотнеся текущие расходы на потребительский набор с расходами базового периода.

$$I_M^t = \frac{M^t}{M^1} = \frac{\sum\nolimits_{i=1}^{n} p_i^t \cdot q_i^t}{\sum\nolimits_{i=1}^{n} p_i^1 \cdot q_i^1}. \tag{7.26}$$

Индекс номинального дохода (расходов) показывает, во сколько раз изменился номинальный доход (расходы потребителя) с базового периода до текущего периода, t. Индекс номинального дохода сам по себе не характеризует динамику благосостояния, поскольку не отражает изменений в ценовых условиях; обычно он применяется для анализа совместно с другими индексами – ценовыми индексами Пааше и Ласпейреса.

Количественный индекс (*индекс реального дохода*) показывает, во сколько раз изменился объем потребления в текущем периоде в сравнении с базовым. Рассчитать количественный индекс можно на основе как методики Пааше (весами выступают цены текущего периода t), так и методики Ласпейреса (весами выступают цены базового периода).

Количественный индекс Пааше рассчитывается по формуле

$$I_P^Q \equiv P^Q = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i^t \cdot q_i^t}{\sum_{i=1}^{n} p_i^t \cdot q_i^1}. \tag{7.27}$$

Количественный индекс Ласпейреса рассчитывается по формуле

$$I_L^Q \equiv L^Q = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i^1 \cdot q_i^t}{\sum_{i=1}^{n} p_i^1 \cdot q_i^1}. \tag{7.28}$$

Количественные индексы Ласпейреса и Пааше отражают динамику реального дохода потребителя. Каждый имеет свои преимущества и недостатки и используется в тех случаях, когда может дать наиболее полную информацию об изменении благосостояния потребителя.

Ценовой индекс (*price index – PI*) рассчитывается по методикам Пааше (весами выступают объемы текущего периода) и Ласпейреса (весами выступают объемы базового периода).

Ценовой индекс Пааше (*Paasche price index*) рассчитывается по формуле

$$I_P^P \equiv P^P = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i^t \cdot q_i^t}{\sum_{i=1}^{n} p_i^1 \cdot q_i^t}. \tag{7.29}$$

Ценовой индекс Ласпейреса (*Laspeyres price index*) рассчитывается по формуле

$$I_L^P \equiv L^P = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i^t \cdot q_i^1}{\sum_{i=1}^{n} p_i^1 \cdot q_i^1}. \tag{7.30}$$

Ценовые индексы Ласпейреса и Пааше показывают изменение цен на блага из потребительского набора; непосредственно динамику благосостояния агента они не характеризуют, поскольку не улавливают изменений в номинальном доходе; для оценки изменений в благосостоянии используются совместно с индексом номинального дохода (индексом расходов).

В значительном количестве случаев качественную оценку изменений в благосостоянии потребителя позволяет получить анализ:

– значений количественных индексов;
– соотношений ценовых индексов с индексом расходов.

Алгоритм использования индексов для оценки изменений в благосостоянии подробно рассматривается ниже на примере заданий, предполагающих использование: (*а*) индексов реального дохода; (*б*) сопоставления значений ценовых индексов и индекса номинального дохода.

Типовые задания с решениями и ответами

Задание 7.1

Функция полезности пенсионера Антонова имеет вид: $U\left(x_1, x_2\right)=x_1^2 x_2$. Антонов располагает доходом в 96 руб. Цены товаров: 4 руб. и 1 руб. соответственно.

(а) Если товар x_1 подорожает в 2 раза, какими будут компенсирующая и эквивалентная вариации дохода (используйте подход Слуцкого)?

(б) Если фиксированный доход пенсионера Антонова подлежит индексации, во сколько раз и на сколько процентов он будет изменен при возросшем уровне цены первого блага?

Решения и ответы

(а) Для определения компенсирующей и эквивалентной вариаций дохода, рассчитываемых в рамках подхода Слуцкого, необходимо выяснить состав оптимального набора в исходных ценовых условиях и при изменении цены первого блага.

Начальный оптимум находим из задачи на максимум полезности:

$$\begin{cases} \max U(x_1, x_2), \\ 96 - 4x_1 - x_2 = 0, \\ x_1, x_2 > 0. \end{cases}$$

Решив данную задачу, получим: $\overline{E_1} = (16; 32)$. Рассчитаем величину компенсированного по Слуцкому дохода по формуле $B_C^S = \overline{P_2} \cdot \overline{E_1}$. Компенсированный по Слуцкому доход составит: $B_C^S = 8 \cdot 16 + 1 \cdot 32 = 160$ (руб.). Следовательно, компенсирующая вариация дохода: $CV = 160 - 96 = 64$ (руб.).

Оптимум в новых ценовых условиях получим из задачи на максимум полезности вида:

$$\begin{cases} \max U(x_1, x_2), \\ 96 - 8x_1 - x_2 = 0, \\ x_1, x_2 > 0. \end{cases}$$

Из данной задачи получим новый оптимальный набор: $\overline{E_2} = (8; 32)$. Теперь можно рассчитать эквивалентный доход по Слуцкому по формуле $B_E^S = \overline{P_1} \cdot \overline{E_2}$. Величина эквивалентного по Слуцкому бюджета составит: $B_E^S = 4 \cdot 8 + 1 \cdot 32 = 64$ (руб.). Следовательно, эквивалентная вариация дохода: $EV = |64 - 96| = 32$ (руб.).

Графическая иллюстрация решения и ответа представлена на рис. 7.4.

(б) Рассчитаем коэффициенты индексации, в основе которых – компенсированный доход:

$$i_1 = \frac{B_C^S - B}{B} \cdot 100\ \% = \frac{160 - 96}{96} \cdot 100\ \% \approx 66{,}67\ \%;$$

$$i_2 = \frac{B_C^S}{B} = \frac{160}{96} \approx 1{,}67.$$

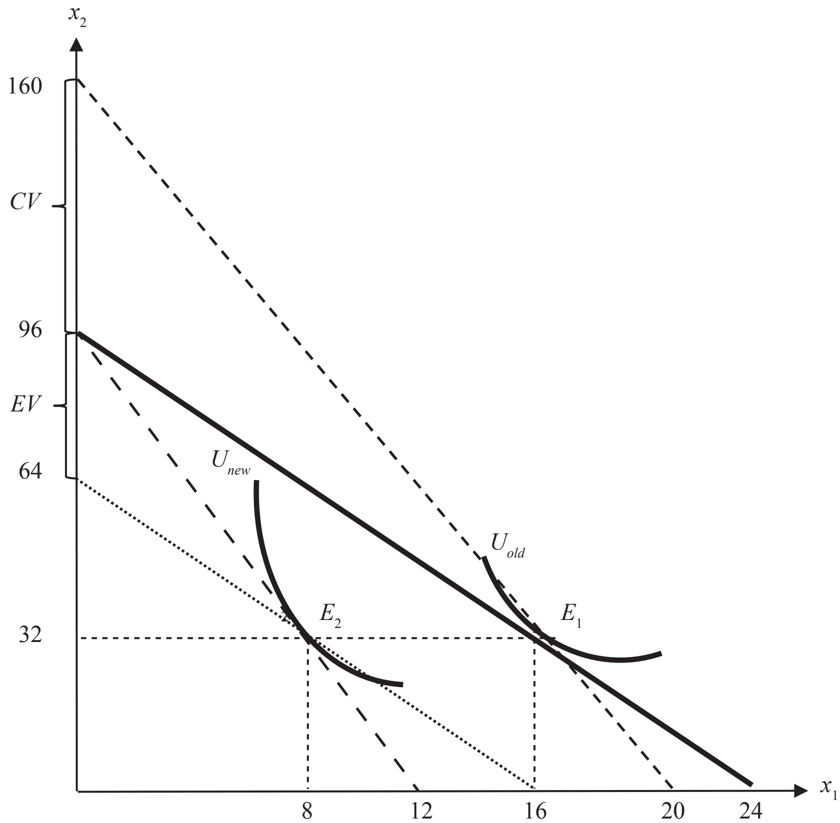

Рис. 7.4. Компенсирующая и эквивалентная вариации дохода

Задание 7.2

Предположим, функция спроса домохозяйства Ивановых на пакетированный чай задана следующим образом: $D(p) = 100 - 2$ р.

(а) Какова валовая выгода (валовой выигрыш) агента от потребления 60 пакетов чая?

(б) Каков при этом чистый выигрыш потребителя (*CS*)?

(в) Чему будет равно изменение *CS*, если цена изменится с 20 руб. до 30 руб. за пакет чая?

Решения и ответы

(а) Величина валового выигрыша потребителя (*TCS*) определяется для конкретного объема покупок и потребления $(\tilde{q})$ с помощью функции предельной ценности – $MV(q)$:

$$MV(q) \equiv p^d(q) = 50 - 0,5q.$$

Функция общей ценности блага, или общий выигрыш потребителя, представляет собой интеграл функции предельной ценности блага. Для нашего случая получим:

$$TCS(q) = \int_0^{\tilde{q}} MV(q)\,dq = 50\tilde{q} - 0,25\tilde{q}^2.$$

Для объема 60 пакетов чая величина *TCS* составит:

$$TCS(60) = \int_0^{60} MV(q)\,dq = 50\tilde{q} - 0,25\tilde{q}^2.$$

Расчеты показывают, что $TCS(60) = 2\,100$ руб. Геометрически $TCS(60)$ – площадь под линией цены спроса, отображенная на рис. 7.5.

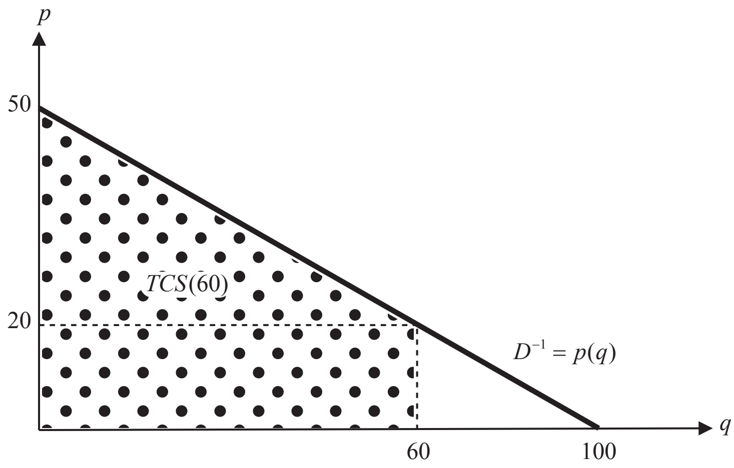

Рис. 7.5. Общий выигрыш потребителя

(б) Чистый выигрыш потребителя (CS) определяется вычитанием из TCS величины осуществленных расходов (*total expenditures – TExp*) по формуле

$$CS\left(\tilde{q}\right) = TCS\left(\tilde{q}\right) - TExp\left(\tilde{q}\right) = TCS\left(\tilde{q}\right) - \tilde{p} \cdot \tilde{q}.$$

Вид функции $TCS(q)$ известен; величина расходов определяется произведением цены и объема. Следовательно, величина чистого выигрыша потребителя составит: $CS\left(\tilde{q}\right)$ = 900 руб.

Геометрически CS – площадь фигуры над линией рыночной цены, под линией цены спроса. Величина чистого выигрыша потребителя показана на рис. 7.6.

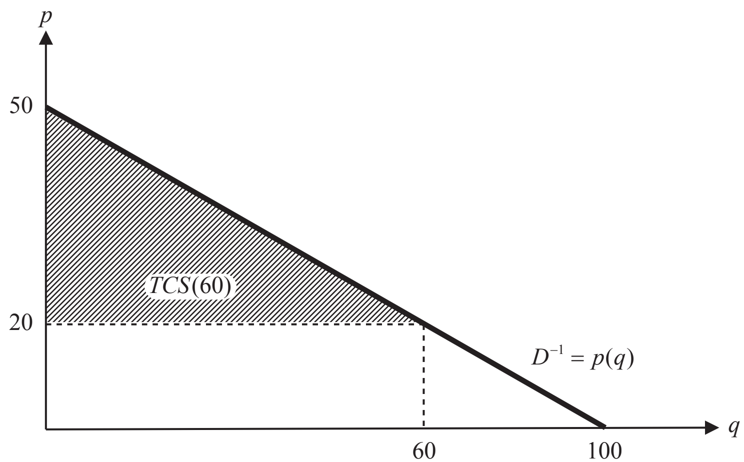

Рис. 7.6. Чистый выигрыш потребителя

(в) Изменение CS определяется разницей между величинами выигрышей, полученных после повышения цены и до ее повышения. Рассчитать изменение выигрыша потребителя, обусловленное увеличением цены с 20 до 30 руб., можно по формуле $\Delta CS = CS(q(30)) - CS(q(20))$.

Величина выигрыша при цене 20 руб. рассчитана в предыдущем пункте задания. Рассчитаем величину $CS(q(30))$, определив для этого объем спроса: $\grave{q} = q\left(30\right) = 100 - 2 \cdot 30 = 40$. Тогда

$TCS(40) = 1\,600$ руб. Расходы потребителя составят 1 200 руб. Тогда величина чистого выигрыша такова: $CS(q(30)) = 400$ руб.

Теперь можно рассчитать изменение выигрыша покупателя. Оно составит: $\Delta CS = 400 - 900 = -500$ (руб.).

Геометрически изменение выигрыша потребителя рассчитывается как площадь трапеции, представленной на рис. 7.7.

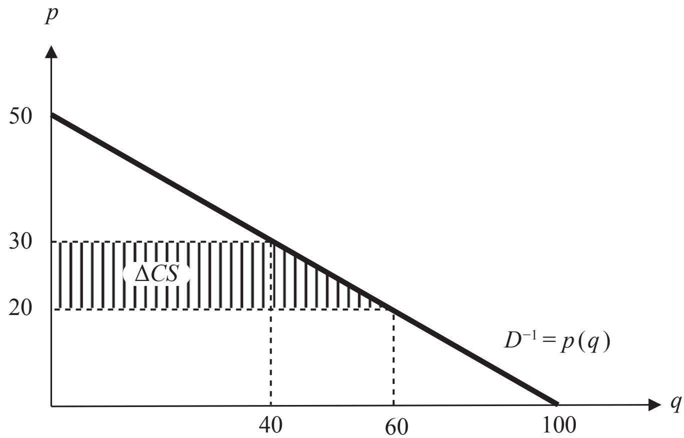

Рис. 7.7. Изменение выигрыша потребителя при изменении цены пакета чая с 20 до 30 руб.

Задание 7.3

На основе теории выявленных предпочтений оцените, используя значения количественного индекса, I^Q (Пааше или Ласпейреса), рассчитанного для конкретного периода времени, возможные изменения в благосостоянии потребителя в случаях, когда:

(а) $I_P^Q > 1$;

(б) $I_P^Q = 1$;

(в) $I_P^Q < 1$;

(г) $I_L^Q > 1$;

(д) $I_L^Q = 1$;

(е) $I_L^Q < 1$.

Решения и ответы

Количественный индекс Пааше рассчитывается по формуле (7.27) и может быть записан в векторной форме следующим образом:

$$I_P^Q = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i^t \cdot q_i^t}{\sum_{i=1}^{n} p_i^t \cdot q_i^1} = \frac{\overline{P^t} \cdot \overline{Q^t}}{\overline{P^t} \cdot \overline{Q^1}}.$$

(а) Значение количественного индекса Пааше больше единицы:

$$\frac{\overline{P^t} \cdot \overline{Q^t}}{\overline{P^t} \cdot \overline{Q^1}} > 1 \Leftrightarrow \overline{P^t} \cdot \overline{Q^t} > \overline{P^t} \cdot \overline{Q^1}.$$

Поскольку $\overline{P^t} \cdot \overline{Q^t} = M_t$, набор базового периода доступен в текущем периоде. Агент выбирает набор $\overline{Q^t}$; следовательно, он улучшает свое положение: уровень благосостояния повышается ($\Delta W > 0$).

(б) Значение количественного индекса Пааше равно единице:

$$\frac{\overline{P^t} \cdot \overline{Q^t}}{\overline{P^t} \cdot \overline{Q^1}} = 1 \Leftrightarrow \overline{P^t} \cdot \overline{Q^t} = \overline{P^t} \cdot \overline{Q^1}.$$

Поскольку $\overline{P^t} \cdot \overline{Q^t} = M_t$, набор базового периода доступен в текущем периоде. Агент выбирает набор $\overline{Q^t}$; следовательно, он улучшает свое положение: уровень благосостояния повышается ($\Delta W > 0$).

(в) Значение количественного индекса Пааше меньше единицы:

$$\frac{\overline{P^t} \cdot \overline{Q^t}}{\overline{P^t} \cdot \overline{Q^1}} < 1 \Leftrightarrow \overline{P^t} \cdot \overline{Q^t} < \overline{P^t} \cdot \overline{Q^1}.$$

Поскольку $\overline{P^t} \cdot \overline{Q^t} = M_t \Rightarrow \overline{P^t} \cdot \overline{Q^t} > M_t$, т. е. набор базового периода не доступен в текущем периоде, агент выбирает набор $\overline{Q^t}$

как лучший из всех доступных наборов. Однако возможности прямого сопоставления текущего и базового наборов количественный индекс не дает, следовательно, ничего определенного об изменении уровня благосостояния сказать нельзя ($\Delta W = ?$).

Количественный индекс Ласпейреса рассчитывается по формуле (7.28) и в векторной форме имеет следующий вид:

$$I_L^Q = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i^1 \cdot q_i^t}{\sum_{i=1}^{n} p_i^1 \cdot q_i^1} = \frac{\overline{P^1} \cdot \overline{Q^t}}{\overline{P^1} \cdot \overline{Q^1}}.$$

(г) Значение количественного индекса Ласпейреса больше единицы:

$$\frac{\overline{P^1} \cdot \overline{Q^t}}{\overline{P^1} \cdot \overline{Q^1}} > 1 \Leftrightarrow \overline{P^1} \cdot \overline{Q^t} > \overline{P^1} \cdot \overline{Q^1}.$$

Поскольку $\overline{P^1} \cdot \overline{Q^1} = M_1$, текущий набор был недоступен в базовом периоде. Информация о доступности базового набора в текущем периоде отсутствует. Поэтому ничего определенного об изменении уровня благосостояния сказать нельзя ($\Delta W = ?$).

(д) Значение количественного индекса Ласпейреса равно единице:

$$\frac{\overline{P^1} \cdot \overline{Q^t}}{\overline{P^1} \cdot \overline{Q^1}} = 1 \Leftrightarrow \overline{P^1} \cdot \overline{Q^t} = \overline{P^1} \cdot \overline{Q^1}.$$

В базовом периоде текущий набор был доступен, но не выбран. Формирование данного набора в текущем периоде означает переход от лучшего набора к худшему. Следовательно, в текущем периоде уровень благосостояния снизился ($\Delta W < 0$).

(е) Значение количественного индекса Ласпейреса равно единице:

$$\frac{\overline{P^1} \cdot \overline{Q^t}}{\overline{P^1} \cdot \overline{Q^1}} < 1 \Leftrightarrow \overline{P^1} \cdot \overline{Q^t} < \overline{P^1} \cdot \overline{Q^1}.$$

То есть в базовом периоде текущий набор был доступен, но не выбран. Формирование данного набора в текущем периоде означает переход от лучшего набора к худшему. Следовательно, в текущем периоде уровень благосостояния снизился ($\Delta W < 0$).

В обобщенной форме ответы ко всем пунктам задания можно представить в табличной форме:

Индекс	Значение индекса		
	$I^Q > 1$	$I^Q < 1$	$I^Q = 1$
Количественный индекс Пааше	$\Delta W > 0$	?	$\Delta W > 0$
Количественный индекс Ласпейреса	?	$\Delta W < 0$	$\Delta W < 0$

Задание 7.4

На основе теории выявленных предпочтений оцените, используя соотношения значений индекса расходов – I^M и ценового индекса – I^P (Пааше или Ласпейреса), рассчитанных для конкретного периода, возможные изменения в благосостоянии потребителя в случаях, когда:

(а) $I^M > I^P_P$;

(б) $I^M = I^P_P$;

(в) $I^M < I^P_P$;

(г) $I^M > I^P_L$;

(д) $I^M = I^P_L$;

(е) $I^M < I^P_L$.

Решения и ответы

Индекс номинального дохода (индекс расходов) рассчитывается по формуле (7.26) и в векторной форме имеет вид:

$$I^t_M = \frac{M^t}{M^1} = \frac{\overline{P^t} \cdot \overline{Q^t}}{\overline{P^1} \cdot \overline{Q^1}} .$$

Ценовой индекс Пааше рассчитывается по формуле (7.29) и может быть представлен в векторной форме следующим образом:

$$I_P^P = \frac{\overline{P^t} \cdot \overline{Q^t}}{\overline{P^1} \cdot \overline{Q^t}}.$$

(а) Индекс расходов больше ценового индекса Пааше:

$$I^M > I_P^P \Leftrightarrow \frac{\overline{P^t} \cdot \overline{Q^t}}{\overline{P^1} \cdot \overline{Q^1}} > \frac{\overline{P^t} \cdot \overline{Q^t}}{\overline{P^1} \cdot \overline{Q^t}} \Leftrightarrow \overline{P^1} \cdot \overline{Q^t} > \overline{P^1} \cdot \overline{Q^1}.$$

То есть текущий набор был недоступен в базовом периоде. Прямое сравнение текущего и базового наборов невозможно. Следовательно, ничего определенного об изменении уровня благосостояния сказать нельзя ($\Delta W = ?$).

(б) Индекс расходов равен ценовому индексу Пааше:

$$I^M = I_P^P \Leftrightarrow \frac{\overline{P^t} \cdot \overline{Q^t}}{\overline{P^1} \cdot \overline{Q^1}} = \frac{\overline{P^t} \cdot \overline{Q^t}}{\overline{P^1} \cdot \overline{Q^t}} \Leftrightarrow \overline{P^1} \cdot \overline{Q^t} = \overline{P^1} \cdot \overline{Q^1}.$$

То есть текущий набор был доступен в базовом периоде, но не выбирался. В текущем периоде агент выбирает менее предпочтительный набор. Следовательно, уровень его благосостояния снизился ($\Delta W < 0$).

(в) Индекс расходов меньше ценового индекса Пааше:

$$I^M < I_P^P \Leftrightarrow \frac{\overline{P^t} \cdot \overline{Q^t}}{\overline{P^1} \cdot \overline{Q^1}} < \frac{\overline{P^t} \cdot \overline{Q^t}}{\overline{P^1} \cdot \overline{Q^t}} \Leftrightarrow \overline{P^1} \cdot \overline{Q^t} < \overline{P^1} \cdot \overline{Q^1}.$$

То есть текущий набор был доступен в базовом периоде, но не выбирался. В текущем периоде агент выбирает менее предпочтительный набор. Следовательно, уровень его благосостояния снизился ($\Delta W < 0$).

Ценовой индекс Ласпейреса рассчитывается по формуле (7.30) и в векторной форме имеет вид:

$$I_L^P = \frac{\overline{P^t} \cdot \overline{Q^1}}{\overline{P^1} \cdot \overline{Q^1}}.$$

(г) Индекс расходов больше ценового индекса Ласпейреса:

$$I^M > I_L^P \Leftrightarrow \frac{\overline{P^t} \cdot \overline{Q^t}}{\overline{P^1} \cdot \overline{Q^1}} > \frac{\overline{P^t} \cdot \overline{Q^1}}{\overline{P^1} \cdot \overline{Q^1}} \Leftrightarrow \overline{P^t} \cdot \overline{Q^t} > \overline{P^t} \cdot \overline{Q^1}.$$

То есть базовый набор доступен в текущем периоде. Агент выбирает набор $\overline{Q^t}$, хотя мог выбрать и набор $\overline{Q^1}$. Значит, агент переходит к набору более предпочитаемому. Следовательно, благосостояние агента увеличивается ($\Delta W > 0$).

(д) Индекс расходов равен ценовому индексу Ласпейреса:

$$I^M = I_L^P \Leftrightarrow \frac{\overline{P^t} \cdot \overline{Q^t}}{\overline{P^1} \cdot \overline{Q^1}} = \frac{\overline{P^t} \cdot \overline{Q^1}}{\overline{P^1} \cdot \overline{Q^1}} \Leftrightarrow \overline{P^t} \cdot \overline{Q^t} = \overline{P^t} \cdot \overline{Q^1}.$$

То есть базовый набор доступен в текущем периоде. Агент выбирает набор $\overline{Q^t}$, хотя мог выбрать и набор $\overline{Q^1}$. Значит, агент переходит к набору более предпочитаемому. Следовательно, благосостояние агента увеличивается ($\Delta W > 0$).

(е) Индекс расходов меньше ценового индекса Ласпейреса:

$$I^M < I_L^P \Leftrightarrow \frac{\overline{P^t} \cdot \overline{Q^t}}{\overline{P^1} \cdot \overline{Q^1}} < \frac{\overline{P^t} \cdot \overline{Q^1}}{\overline{P^1} \cdot \overline{Q^1}} \Leftrightarrow \overline{P^t} \cdot \overline{Q^t} < \overline{P^t} \cdot \overline{Q^1}.$$

То есть базовый набор недоступен в текущем периоде. Информации о доступности набора $\overline{Q^t}$ в базовом периоде нет; наборы не могут быть сравнены друг с другом. Следовательно, ничего определенного об изменении уровня благосостояния сказать нельзя ($\Delta W = ?$).

В обобщенной форме ответы ко всем пунктам задания можно представить в виде таблицы.

Индекс	Соотношение индексов		
	$I^M > I^P$	$I^M < I^P$	$I^M = I^P$
Ценовой индекс Пааше	?	$\Delta W < 0$	$\Delta W < 0$
Ценовой индекс Ласпейреса	$\Delta W > 0$	?	$\Delta W > 0$

Задание 7.5

Пенсионер Иванов в году $(t+1)$ приобретал набор $\overline{Q_1} = (20; 10; 30)$ при ценах $\overline{P_1} = (2; 3; 4)$. В году $(t+2)$ цены изменились и составили: $\overline{P_2} = (3; 1; 5)$. Набор Иванова в году $(t+2)$: $\overline{Q_2} = (15; 25; 20)$.

(а) Как изменилось благосостояние пенсионера Иванова в году $(t+2)$?

(б) Согласуется ли его выбор с принципами оптимизаторского поведения?

Решения и ответы

(а) Для оценки изменений в благосостоянии воспользуемся выводами теории выявленных предпочтений, согласно которым агент действует рационально (не нарушается *WARP*) и, выявив предпочтения по отношению к некоторому набору, либо меняет выбор в пользу лучшего набора, либо формирует набор менее предпочтительный, если исходный недоступен.

В году $(t+1)$ был сформирован набор $\overline{Q_1}$. Проверим, был ли доступен набор $\overline{Q_2}$ в году $(t+1)$. Если набор $\overline{Q_2}$ мог быть приобретен, но выбор был сделан в пользу набора $\overline{Q_1}$, набор $\overline{Q_1}$ выявленно предпочитается набору $\overline{Q_2}$.

Расходы агента в году $(t+1)$ определяем по формуле

$$M_1 = \overline{P_1} \cdot \overline{Q_1}.$$

Расходы составляли сумму:

$$M_1 = 2 \cdot 20 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 30 = 190 \text{ (ден. ед.)}.$$

Оценим доступность набора $\overline{Q_2}$ в году $(t + 1)$:

$$\overline{P_1} \cdot \overline{Q_2} = 185 \text{ (ден. ед.)} < M_1.$$

Следовательно, набор $\overline{Q_2}$ был доступен, но не выбран. Значит, агент непосредственно может сравнивать оба набора и выявляет свои предпочтения в пользу набора $\overline{Q_1}$: $\overline{Q_1} \underset{\rightarrow}{\succ} \overline{Q_2}$.

В году $(t + 2)$ был сформирован набор $\overline{Q_2}$. Проверим, был ли доступен набор $\overline{Q_1}$ в году $(t + 2)$. Если набор $\overline{Q_1}$ мог быть приобретен, но выбор был сделан в пользу набора $\overline{Q_2}$, наблюдается нарушение *WARP*. Если набор $\overline{Q_1}$ недоступен, агент вынужден сформировать менее предпочтительный набор, следовательно, благосостояние агента снижается.

Проверяем доступность набора $\overline{Q_1}$ в году $(t + 2)$. Расходы агента в этом году составили: $M_2 = \overline{P_2} \cdot \overline{Q_2} = 170$ (ден. ед.). Расходы на набор $\overline{Q_1}$ в году $(t + 2)$: $\overline{P_2} \cdot \overline{Q_1} = 220$ (ден. ед.), что превышает M_2. Следовательно, набор $\overline{Q_1}$ при ценах $\overline{P_2}$ и бюджете M_2 недоступен. Значит, благосостояние пенсионера Иванова в году $(t + 2)$ снизилось.

(б) Поведение агента, как было показано в пункте **(а)** данного задания, не нарушает *WARP*. Кроме того, реакция спроса на изменение цены соответствует закону спроса: увеличение цены блага вызывает уменьшение объема покупок этого блага; снижение цены блага обусловливает увеличение объема покупок данного блага. Из сказанного можно заключить: поведение агента согласуется с принципами оптимизаторского поведения, когда среди всех доступных наборов он выбирает лучший (более предпочтительный).

Задание 7.6[49]

Предположим, предпочтения потребителя *C* заданы на наборах из двух благ (z_1, z_2) и представимы функций полезности вида: $U\left(z_1, z_2\right) = z_1 z_2^2$. Изначально агент формирует оптимальный набор в ценовых условиях $\overline{P_1} = (2; 4)$, имея бюджет 120 руб.

Правительственные органы принимают решение о взимании налога с потребителей с целью пополнить доходную часть бюджета и дестимулировть потребление первого блага. Предлагаются два варианта действий: (1) ввести налог на потребление[50] первого блага со ставкой 2 руб. за каждую приобретенную единицу; (2) ввести дополнительный паушальный[51] налог на доходы со ставкой, составляющей поступления налога с продаж (после его введения).

Как известно, налогообложение потребителя обусловливает снижение его благосостояния. Какой вариант налогообложения приведет к меньшим потерям в благосостоянии агента *C*?

Решение и ответ

Ответ на поставленный вопрос требует сравнения последствий введения налога с продаж и паушального подоходного налога. Для этого поставим и последовательно решим три задачи на максимум полезности при ограничении на расходы. С целью определения состава оптимального набора будем использовать маршаллианские функции спроса [в соответствии с формулой (5.20)].

1) Исходный оптимум потребителя определяется посредством решения задачи вида:

---

[49] Это задание представляет собой формализацию сравнительного анализа видов налогов, приведенного в подразделе 5.6 «Выбор налогов» учебника Х. Р. Вэриана «Микроэкономика. Промежуточный уровень. Современный подход» (С. 105–108).

[50] Речь идет о разновидности потоварного налога.

[51] От нем. *die Pauschale* – общая (единая) сумма. Паушальный налог – налог, взимаемый единой суммой, целиком; без дифференциации. Синонимы термина «паушальный налог» – аккордный налог, условно-постоянный налог.

$$\begin{cases} \max U(z_1, z_2), \\ 120 - 2z_1 - 4z_2 = 0, \\ z_1, z_2 > 0. \end{cases}$$

Состав исходного оптимального набора:

$$\overline{E_1} = \left(\frac{1}{1+2} \cdot \frac{120}{2}; \ \frac{2}{1+2} \cdot \frac{120}{4} \right) = (20; 20).$$

Определив состав оптимального набора, можем рассчитать величину получаемой агентом C полезности, определяющей уровень его благосостояния. Полезность исходного оптимального набора:

$$U\left(\overline{E_1}\right) = 20 \cdot 20^2 = 20^3 = 8 \cdot 10^3.$$

2) Оптимальный набор после введения налога на потребление первого блага $\left(\overline{E_2}\right)$ найдем из задачи

$$\begin{cases} \max U(z_1, z_2), \\ 120 - 4z_1 - 4z_2 = 0, \\ z_1, z_2 > 0. \end{cases}$$

Состав нового оптимального набора:

$$\overline{E_2} = \left(\frac{1}{1+2} \cdot \frac{120}{4}; \ \frac{2}{1+2} \cdot \frac{120}{4} \right) = (10; 20).$$

Зная состав оптимального набора в условиях потоварного налога, рассчитаем полезность набора, а затем определим изменения в благосостоянии агента.

Полезность набора: $U\left(\overline{E_2}\right) = 10 \cdot 20^2 = 4 \cdot 10^3$. Определим изменения в благосостоянии через изменение полезности оптимального набора:

$$\Delta U = U\left(\overline{E_2}\right) - U\left(\overline{E_1}\right) = 4 \cdot 10^3 - 8 \cdot 10^3 = -4 \cdot 10^3.$$

Сумма налоговых выплат агента C составит:

$$T = t \cdot z_1^2 = 2 \cdot 10 = 20 \ \text{(руб.)}.$$

Данную величину будем использовать при формулировке бюджетного ограничения на следующем этапе анализа.

3) Оптимальный набор в условиях введения паушального подоходного налога $\left(\overline{E_3}\right)$ определим, решив задачу, в которой расходы потребителя ограничены суммой $\tilde{B}$. Данная сумма – разница между бюджетом и величиной налога – составляет 100 руб. Задача имеет вид:

$$\begin{cases} \max U(z_1, z_2), \\ 100 - 2z_1 - 4z_2 = 0, \\ z_1, z_2 > 0. \end{cases}$$

Решив задачу, получим состав оптимального набора, формируемого в условиях паушального налога:

$$\overline{E_3} = \left(\frac{1}{1+2} \cdot \frac{100}{2}; \ \frac{2}{1+2} \cdot \frac{100}{4} \right) = \left(\frac{50}{3}; \frac{50}{3} \right) \approx (16,7; 16,7).$$

Полезность набора:

$$U\left(\overline{E_3}\right) = \frac{50}{3} \cdot \left(\frac{50}{3}\right)^2 = \left(\frac{50}{3}\right)^3 = \left(\frac{5}{3}\right)^3 \cdot 10^3 \approx 4,65 \cdot 10^3.$$

Определим изменения в благосостоянии через изменение полезности оптимального набора:

$$\Delta U = U\left(\overline{E_3}\right) - U\left(\overline{E_1}\right) \approx 4,65 \cdot 10^3 - 8 \cdot 10^3 \approx -3,35 \cdot 10^3.$$

4) Сопоставив изменения в благосостоянии агента при двух вариантах налогообложения, придем к выводу: потери в благосостоянии потребителя C меньше в случае использования схемы «паушальный подоходный налог». Следует иметь в виду, что данный вывод справедлив только по отношению к потребителю C, а не к другому потребителю или к сектору домашних хозяйств в целом.

Таким образом, с меньшими потерями в благосостоянии агент C столкнется в случае введения паушального подоходного налога.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Бусыгин В. П. Микроэкономика: третий уровень : учебник. В 2 т. Т. 1 / В. П. Бусыгин, Е. В. Желободько, А. А. Цыплаков. – Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2008. – С. 17–206.

Вэриан Х. Р. Микроэкономика. Промежуточный уровень. Современный подход / Х. Р. Вэриан. – М. : ЮНИТИ, 1997. – С. 35–201; 274–292.

Кац М. Микроэкономика / М. Кац, Х. Роузен. – Минск : Новое знание, 2004. – С. 25–63; 114–144.

Лейбенстайн Х. Эффект присоединения к большинству, эффект сноба и эффект Веблена в теории покупательского спроса / Х. Лейбенстайн // Теория потребительского поведения и спроса. – СПб. : Экономическая школа, 1993. – С. 304–325.

Пиндайк Р. Микроэкономика / Р. Пиндайк, Д. Рубинфельд. – М. : Дело, 2000. – С. 78–166.

Современный словарь экономической теории Макмиллана. – М. : ИНФРА-М, 2003. – 608 с.

Чеканский А. Н. Микроэкономика. Промежуточный уровень : учебник / А. Н. Чеканский, Н. Л. Фролова. – М. : ИНФРА-М, 2005. – С. 31–156.

Чеканский А. Н. Микроэкономика. Промежуточный уровень : учебное пособие / А. Н. Чеканский, Н. Л. Фролова – М. : ИНФРА-М, 2005. – С. 9–68.

Экономико-математический энциклопедический словарь / гл. ред. В. И. Данилов-Данильян. – М. : ИНФРА-М, 2003. – 688 с.

Mas-Colell A. Microeconomic Theory / A. Mas-Colell, M. D. Whinston, J. R. Green. – NY : Oxford University Press, 1995. – P. 3–104.

Varian H. R. Intermediate Microeconomics. A Modern Approach. – Third Ed. – NY ; London : W. W. Norton & Company, 1993. – P. 20–176.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Основные обозначения, используемые в тексте

Обозначение	*Расшифровка*
z_i, x_i	Количество *i*-го блага
$\overline{Z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ или $\overline{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$	Набор из *n* благ ($n \geq 2$)
p_i	Цена *i*-го блага
$\overline{P} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$	Вектор цен благ ($n \geq 2$)
MU_i	Предельная полезность *i*-го блага
$U\left(\overline{Z}\right) \equiv U(z_1, z_2, \ldots, z_n)$	Полезность набора благ
B	Бюджет потребителя
T	Сумма уплачиваемых налогов (ставка паушального налога)
t	Ставка налога
τ	Дисконт (величина скидки к цене)
$\dfrac{MU_i}{p_i}$	Взвешенная предельная полезность *i*-го блага
$MRS_{ji}\ [MRS_{21}]$	Предельная норма замещения *j*-м благом *i*-го [2-м благом 1-го]
z_i^0	Количество *i*-го блага в оптимальном наборе
d_i	Спрос на *i*-е благо
Ł	Лагранжиан (функция Лагранжа)
$\lambda\ [\mu]$	Неопределенный множитель Лагранжа в задаче на максимум полезности при ограничении на расходы [в задаче на минимум расходов при ограничении на полезность]

Обозначение	*Расшифровка*
TE	Общий эффект от изменения цены
SE	Эффект субституции (замещения)
IE	Эффект дохода
$\overline{\Omega} = (\omega_1, \omega_2)$	Натуральный доход (начальный запас благ)
M	Денежная оценка натурального дохода (начального запаса благ)
EIE	Эффект начального запаса
CV	Компенсирующая вариация дохода
EV	Эквивалентная вариация дохода
TV	Общая ценность блага для потребителя
MV	Предельная ценность блага для потребителя
$TExp(q)$	Общие расходы потребителя на покупку блага в объеме q
TCS	Валовой выигрыш потребителя (покупателя)
CS	Выигрыш потребителя (покупателя)
NCS	Чистый выигрыш потребителя (покупателя)
ΔCS	Изменение выигрыша потребителя (покупателя)
ΔW	Изменение благосостояния потребителя
DRP	Прямо выявленное предпочтение
IRP	Косвенно выявленное предпочтение
$WARP$	Слабая аксиома выявленных предпочтений
$SARP$	Сильная аксиома выявленных предпочтений

Учебное издание

Боголюбова Надежда Павловна

МИКРОЭКОНОМИКА: ТЕОРИЯ ПОТРЕБИТЕЛЬСКОГО ПОВЕДЕНИЯ

Учебное пособие

Заведующий редакцией *М. А. Овечкина*
Редактор *Е. И. Маркина*
Корректор *Е. И. Маркина*
Компьютерная верстка *Н. Ю. Михайлов*

План выпуска 2017 г. Подписано в печать 23.05.2017.
Формат 60 × 84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Уч.-изд. л. 10,2. Усл. печ. л. 11,6. Тираж 50 экз. Заказ № 73.

Издательство Уральского университета
620000, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ.
620000, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4.
Тел.: +7 (343) 350-56-64, 350-90-13.
Факс: +7 (343) 358-93-06.
E-mail: press-urfu@mail.ru

Для заметок

Для заметок

ЛИДЕР УНИВЕРСИТЕТСКОГО КНИГОИЗДАНИЯ

УНИВЕРСИТЕТСКАЯ КНИГА

2015

9 785799 620660